講義ノート
線形代数AとB

伊敷喜斗

https://yoshito-ishiki-math.github.io

2024年7月9日

第0回　記号

- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合

第1回　イントロダクション

1.1　線形代数を学ぶ意義?

線形代数は数的処理を伴う学問分野には必ず現れると言っても良いくらい広範にわたる応用を持っている．その理由はよくわからないが，おそらくそもそも現行人間が頑張って扱える数的処理が，せいぜい線形的な現象程度に限られるので，線形ではないものも頑張って線形近似して線形代数に落とし込もうとする人間の涙ぐましい努力によって至る所に線形代数が現れるのかもしれない．線形でないものを線形代数に落とし込む操作の一つは，関数の微分である．微分というものは関数を一次関数で近似する方法なのだが，この一次関数というものが線形的なのである．

さて線形代数は線形的な現象を扱う学問とはいうものの，それではその線形的な現象とは何かということを説明しなければなるまい．大まかに言えば線形的な現象とは以下のような特徴を持つ操作，や関数，あるいはシステムのことである．

1. 入力 x と入力 y があったとき $x+y$ に対応する出力 $A(x+y)$ は x と y に対応する出力 Ax と Ay の和に等しい．つまり $A(x+y) = Ax + Ay$ である．

2. 入力 x の実数 r によるスカラー倍 (実数倍)$r \cdot x$ に対して $A(r \cdot x)$ の出力は x に対する出力の r 倍に等しい．つまり $A(r \cdot x) = r \cdot Ax$

これらの文言は説明のためのものなので数学的厳密性はあまりない．さて**和** $x+y$ や**スカラー倍** $r \cdot x$ などが出てきたがこれは一体なんなのだろうか？その疑問は講義が進むごとに解消されるだろうから，今の所差し当たり x と y はただの実数だと思うと上の文言は理解しやすいと思う．あるいは，高校までで習ったベクトルの和やスカラー倍のことだと思っても良い．**ベクトル**は線形代数における基本的な対象である．

さてここまで読んで，線形ではない現象をそのまま扱いたいという方もおられることだろうから，ここで一つ私の失敗とその教訓を示しておく．難しい現象をそのまま扱おうとする姿勢はとても正しいし，その執念がうまくいく場合もままある．しかし一般的にはとても難しいので線形近似して大まかに扱うしかできなかったりする．**簡略化したものすら扱えないようでは難しいものをそのまま扱うことはかなり難しい．**これが私が失敗して学んだ一つのことである．経済学などでもモデルを線形的にして大まかな挙動を扱うような話題があるかと思うが，そういう大まかな挙動を知れるだけでも貴重な進歩であり，難しい分析への第一歩なのだと思う．

線形性を定義するのに必要な**和**や**スカラー倍**が定義できるような空間 (集合) は**線形空間**あるいは**ベクトル空間**と呼ばれている．この講義では線形空間という呼び方を用いる．抽象的にこの線形空間というものを定義できるが，この講義では扱わない．この講義で

は数ベクトル空間というかなり具体的な線形空間のみを扱う．それは，自然数 n を固定して実数の n 個の組 $[a_1, \ldots, a_n]$ 全体の集合 $\mathbb{R}^n$ である．線形空間 (ベクトル空間) は線形代数の中心的概念である．

1.1.1　線形的現象とそうでないもの

ここで線形的現象の具体例を出してみよう．

1. 物品を一つ購入するお買い物：例えば１５０円のチョコレートを x 個数だけ購入するとその代金を Ax と書くことにすると，これは線形的な現象になっている．チョコを x 個カゴに入れていたとして追加で y 個カゴに入れるとその代金 $A(x+y)$ は $Ax + Ay = 150x + 150y = 150(x+y) = A(x+y)$ になっている．この場合はちょっと実数倍を考えるのちょっと不適切だが，とにかく買う量を 2 倍にすると代金も二倍になることがわかるし，一般に買う量を n 倍すると代金も n 倍になる．この代金 Ax は単純に一変数の一次関数として $150 \cdot x$ と計算することができる．

2. 物品を二つ購入する買い物：150 円のチョコと 170 円のクッキーを買う買い物を考える．チョコの個数を x_1 としクッキーの個数を x_2 としたときの代金を $A(x_1, x_2)$ と書くことにする．この代金は $150 \cdot x_1 + 170 \cdot x_2$ と書くことができる．カゴの中にチョコが x_1 個とクッキーが x_2 個あったとして追加でチョコを y_1 個クッキーを y_2 とすると代金 $A(x_1 + y_2, x_2 + y_2)$ は $A(x_1, x_2) + A(y_1, y_2)$ で計算できる．スカラー倍も同様である．注意してほしいのはこの代金 $150 \cdot x_1 + 170 \cdot x_2$ は 1 変数の一次関数ではないということである．

3. 以上では実数倍がちょっと考えづらい例ばかりであるが，実数倍が適切そうな例としてはお肉などの量り売りを考えれば良い．お肉を $100\sqrt{3}$ グラム買う人はそうそういないと思うが，例えば 3 等分，つまり 200 グラムを 1/3 倍などして買う人はいるかもしれませんね．例としては 100 グラム 133 円のお肉を 269 グラムで買うと $133 \cdot (2.69) = 357.77$ 円になる．一般にこの状況の下では x グラムのお肉は $\frac{133}{100}x$ 円になる．もちろんこれは x に関して線形的である．

このような線形的な現象を分析するのが線形代数である．

線形的ではない現象の例も挙げておこう．このような現象の方が世の中多いかと思われる．

1. 1 個 79 円だが，セールで 4 個で 298 円のクッキーの代金：これはクッキーの個数と比例関係にない．

2. 実数 r に対して r を半径とする円の面積：r^2 に比例するので線形ではない．ただし r が負の場合にはとりあえず 0 と考えることにする．

さてこれから学ぶ線形代数では二次元以上の空間が主役である．それというのも実は一変数の線形な関数は一次関数に限るのである．以下に証明を載せておこう．

命題 1. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数であって実数に値をとる任意の線形な関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える．つまりこの f は以下の条件を満たす．

1. 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ について $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が成り立つ．
2. 任意の $x \in \mathbb{R}$ と実数 $r \in \mathbb{R}$ について $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ が成り立つ．

このとき f に対してある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して $f(x) = \alpha \cdot x$ と表すことができる．逆にこのように表される関数は線形である．

証明. α を $\alpha = f(1)$ とおく．すると $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = \alpha \cdot x$ なので前半の証明が終わる．後半はすぐにわかる．条件 1 は用いてないことに注意しよう．$\mathbb{R}$ は線形代数でいうと**一次元空間**なので話が簡単すぎて条件 1 を使うまでもなく線形写像が一次関数に限られることが証明できてしまう． □

このような事情から線形代数では一次元の空間から一次元の空間への線形写像よりも基本的に 2 次元以上の空間からの線形な写像などを扱うことになる．ここで「次元」や「空間」という定義していない言葉が出てきたが，数ベクトルの解説でその意味は明らかになるだろう．簡単に説明すると 1 次元の (実線形) 空間とは実数全体のことで，2 次元の (実線形) 空間とは実数の二つの組 $[a, b]$ 全体の集合のことである．n 次元ならば実数の n 個の組 $[a_1, \ldots, a_n]$ 全体の集合である．

以上が線形代数の導入の話だが，実務的な話をすると，簡単に言ってしまえば，**線形代数とは連立一次方程式の詳しい分析である．**しかし連立一次方程式と侮るなかれ．かなり応用の幅が広い．上で述べた「線形的な現象」とは「線形写像」という言葉で理解することができるし，(有限次元ならば) 線形写像というものは「行列」で理解できるし行列は「連立一次方程式」として理解できる．このような事情があるので，線形代数というものはいろいろな導入の仕方があるにも関わらず，線形代数の話はどのような切り口をしようとも，必ず連立一次方程式の話に帰着するのである．連立一次方程式を頑張ろうね．

$$\text{線形的現象} \xleftrightarrow{\text{同じ (と思うことにする)}} \text{線形写像} \xleftrightarrow{\text{だいたい同じ}} \text{行列} \xleftrightarrow{\text{まあまあ同じ}} \text{連立一次方程式}$$

1.1.2　講義の大まかな予定

初歩的な線形代数の大まかな目標は以下のようになると思う．

- **行列とベクトルとその基本的な演算を理解し，さらに連立一次方程式との関係も理解する．**

これを元にこの講義を大まかに前半と後半に分けると以下のようになる．

(前半) ベクトルと行列を導入し，連立一次方程式との関連を見る．ついでに連立一次方程式の解空間の自由度として行列の階数も導入する．

(後半) まず最初は行列の可逆性に関す話題を扱う．行列式や，掃き出し法を用いた逆行列の計算法なども扱う．次に行列のある種の個性を抜き出したような量である固有値を扱う．

より詳細に細かく述べると以下のようになる．例を以下に挙げるがこれだけに限らない．またテストの結果や進度の具合によっては省略されることもある．

1. 数ベクトルの演算.
2. 行列の演算.
3. 行列論と呼ばれるもの．特に (係数拡大行列) 行列を用いた一次連立方程式の解法.
4. 行列を基本変形によって基本形に変形すること．簡約行列に変形することを含む．これによって階数を計算することができる.
5. 行列式の計算．行列を行列のサイズに関して帰納的に定義するが，この定義を直接用いて計算はしないでください．行列の基本変形を用いた行列式の計算.
6. ベクトルの線形独立性と線形従属性.
7. 線形写像と行列の関係性．特に行列のわけわからん積の定義が線形写像の合成に対応していること.
8. 逆行列の計算
9. 行列の固有値，対角化，冪 (多分二次行列だけ).

1.1.3 この講義でやる予定のないもの

この講義ではやらないものであるが，重要な線形代数の応用例を以下に挙げるが，これだけに全く限らない.

1. 線形計画法 (最適化問題), 私はあんまりよく知らないので講義で紹介できないです.
2. 産業関連問題, 私はあんまりよく知らないので講義で紹介できないです.
3. コンピュータグラフィクス, 三次元の回転行列とか関連するようだが，私はあんまりよく知らないので講義で扱えないです.
4. 二次形式 (極小極大問題に関係ある．ヘッシアンとか), 二変数実数値関数 $f(x,y)$ についてヘッシアンと呼ばれる行列 $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$ を調べて極大値極小値を求めるということをとてもよくやるのですが，これはもう解析の話なので線形代数の講義では解説しないです.

5. 有限体とか乱数，有限体上の線形代数を使ってメルセンヌツイスタという乱数生成法が構成されているらしいですが，あんまりよく知らないので解説できないです.

6. 機械学習, 最近流行りの機械学習でも線形代数はよく使うと思うが，そもそも数的処理を伴い分野では大体線形代数を使う.

7. グラフ理論にまつわるもの．グラフに行列を対応させることによってグラフ上の輸送とかの話を線形代数として処理できるようだが，そもそもこういうのは線形代数をやった後に学ぶようなものなのでやらない．Google のページランキングという Google の検索エンジンの肝となっている理論もこれに関連するようだ.

8. 抽象的な線形空間，この講義では具体的な線形空間 $\mathbb{R}^n$ しか扱わない.

9. 複素係数の線形空間, この講義では $\mathbb{R}$ 係数の線形空間しか扱わない．他にも有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の線形代数なども可能なのだが，そういうのはガロア理論とか数論とかの話になると思う.

10. 対称行列の対角化, これは上であげたヘッシアンと関係がある．あと平方完成とも関係がある.

11. 固有値を用いた微分方程式の解法, 線形代数というのは微分方程式解くのにも使えるのですが，これはもう解析学なのでこの講義では扱いません．差分方程式 (漸化式で帰納的に定義された数列) くらいなら紹介できるかもしれない.

12. 漸化式によって定義される数列の固有値を用いた解法

13. 内積とかノルムとか正規直交化．このような計量を入れた線形代数は扱わないことにする．でも大事なので将来必要そうなら自習してください.

1.1.4　高校までの数学と違うところ

ベクトルに矢印を書かない

高校まではベクトルの上に矢印を書いていたと思う．例えば $\vec{a}$ や $\overrightarrow{OA}$ のように．ベクトルであることを表すのにいろいろな流儀がある．例えば以下のような**流儀**がある.

1. 矢印を上に書く: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}...,$

2. 太字にする：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}...,$

3. 黒板太字と呼ばれる書体を用いる：$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d}, \mathbb{e}...,$

4. ベクトルであると宣言すれば済むから特に書体を変えない：$a, b, c, d, e, ...$

一つ一つ説明しておこう．

1番の記法はわかりやすいし，高校でも馴染みがあるものだが，大量に書こうとすると結構しんどいので，講義や講義ノートで用いるのはやめておく．

2番の太字は，PDFなら区別できるが，手書きで黒板やノートに書こうとすると手間がかかるので，講義や講義ノートで使うのはやめておく．

講義と講義ノートでは，3番の黒板太字を用いることにする．この書体を書くには，普通のアルファベットを書いて縦線を一本追加すると良い．そもそもこの黒板太字という書体は手書きで2番の太字をなんとか書こうとして発明されたものだと思われるので，これはいわば略記法のようなもので正式には2番の太字であるべきなのだが，いつの間にか別の書体になり，さらには実数全体の集合 $\mathbb{R}$ や整数の集合 $\mathbb{Z}$ などはこの黒板太字でかくのが主流となるという不思議なことが起きている[1]．世の中には不思議なことが他にもたくさんあるのでこの程度のことは気に留めないことにする．このような事情から黒板太字は使うべきではないという方々もおられるし，一方でそもそも手書きできないような文字 (太字など) を使うべきではないという人もおられる．私は状況によって都合の良い方を使うことにする．

ベクトルの書体は，私としては正直どれでもいいのだが，私の好みは4番の何も書体を変えないものである．しかしこの記法はちょっと初心者にあまり優しくない気がするので，講義で使うのはやめておく．慣れてくるとわざわざ矢印書いたり太字にしたりするのが面倒になるし書体を変えなくても区別がつくようになる．そうなった時には自分で好きな書体を使うと良い．

結論としては講義でベクトルを表す記号としては3番の黒板太字を用いることにする．

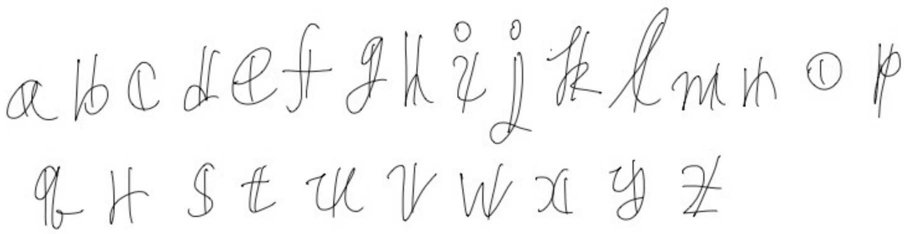

図 1.1: 手書きの小文字アルファベットの黒板太字．おそらく講義においては $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$, $\mathbb{c}$ くらいしか使わないのではないかと思われる．

数ベクトルの記法

数ベクトルというのは次のセクションでやることになっているので順番を少し先取りすることになるが，これは実数を複数個並べた順序対のことである．つまり $(0,0)$ や $(1,0,-7)$ などである．おそらく平面や空間の**座標表示**として学んだかと思われる．この講義では，これを $[0,0]$ や $[1,0,-7]$ というふうに**大括弧** $[,]$ を使って表示することにする．ただし，次回詳細に述べるが，この講義ではベクトルは**縦ベクトル**として扱う．つまり

[1]ほうれんそうマンと，かいけつゾロリみたいだね

$[1, 0, -7]$ ではなく $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ という方を基本的な記法として扱う．大括弧ではなく $(,)$ を使う記法もあるが，黒板やノートに板書する際には，絶妙なカーブを伴う小カッコ $(,)$ よりも直線的な大括弧 $[,]$ の方が筆記しやすいのでこちらを用いることにする．

第2回　ベクトル

2.1　ベクトル

大学の線形代数では,「矢印と大きさを持ったもの」というベクトルの定義は採用しない．別にこのような幾何学的描像から出発しても線形代数を展開できるが，ちょっと遠回りなので，この講義 (と数学者は) ではベクトルといえば「数ベクトル」のことを指すことにする．

数学に慣れてくるとおそらくベクトルと数ベクトルを区別しなくなってくると思われる．

とりあえず幾何学的なベクトルがなんであったか思い出してみよう．平面や空間内に 2 点 O と A を取ったとき O から A へ伸びる矢印をベクトル $\overrightarrow{OA}$ と書くのであった．これは点 O から A へ向かう時の方向と道のりの長さを表していると考えられる．この講義ではこのベクトルの描像は使わず，**数ベクトル**のみを扱うので，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の話は気にしなくても良いが，本質的に同じものである．

それでは**数ベクトル**とは何かというとそれは，実数を (有限) 複数個並べたものである．つまり $[0, 1, 4]$ や $[8, 0]$ は数ベクトルである．ただしベクトルの成分の数が違うことに注意しよう．

重要注意 2. 一応念のため幾何学的なベクトルと数ベクトルの対応関係をみよう．幾何学的なベクトル $\overrightarrow{OA}$ を数ベクトルに変換するには座標軸を引くと良い．平面あるいは空間内に直行する軸を引く．このとき O は原点になるようにする．その軸を元にすると $\overrightarrow{OA}$ の座標も定まるのでその座標を並べると数ベクトルになる．数ベクトルから幾何学的なベクトルを構成する際も逆に座標軸を与えてあげてその数ベクトルに対応するベクトルを引いてやれば幾何学的なベクトルが出来上がる．ところで話を先取りするが，この座標軸を引くという作業は線形空間の**基底**を一つ固定することに他ならない．上で述べたベクトルと数ベクトルの対応は実は基底を一つ定めると抽象的な線形空間と数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の間に同型が生えてくるという話に他ならない．また上で述べた幾何学的なベクトルはいろいろごまかしが入っている．幾何学的なベクトルはアフィン空間というものの元であり，基点 O を定めると線形空間になるという話が上の説明に混ざっている．実は高校の数学というのはアフィン空間などを説明せずにベクトルを導入しており，結構難しいことを難しいと思わせずに教育している．

2.1.1　縦ベクトルと横ベクトル

上の説明では横向きに数字を並べたもの, $[0, 1, 4]$ や $[8, 0]$ をただ単にベクトルと呼んだが，横向きに並べているのでこれは**横ベクトル**と呼ばれている．

これに対して数字を縦に並べたものは**縦ベクトル**と呼ばれている．例えば $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} \sqrt[3]{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}$ などである．

この講義ではベクトルといったら縦ベクトルのことを指すことにする．この決まりは後々に出てくる行列の積との整合性を保とうとするためである．

2.1.2　ベクトルの成分

横ベクトルは左から第1成分，第2成分と数える．つまり $[0,1,4]$ の第1成分は0である．

これに対して縦ベクトルの成分は**上から**第1成分第2成分と数える．例えば $\begin{bmatrix} \sqrt[3]{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}$ の第1成分は $\sqrt[3]{5}$ であるし，第4成分は0.8である．

2.1.3　ベクトルの相等

二つのベクトルが等しいとはどういうことか説明する．まず，二つの横ベクトルはその成分の個数が等しくなおかつその二つの横ベクトルのそれぞれの成分が等しいとき，そしてそのときに限りこれらのベクトルは等しいという．

例えば，$[9,0,1]$ と $[3^2,0^2,1^2]$ は成分の個数が両方とも3個で第1成分，第2成分, 第3成分がそれぞれ等しいのでこの二つのベクトルは等しいのである．記号で書くと $[9,0,1]=[3^2,0^2,1^2]$ である．

さらに例えば $[0,1]$ と $[0,1,0]$ は成分の個数が2と3で異なるのでこれら二つのベクトルは異なる．記号で書くと $[0,1] \neq [0,1,0]$ である．型が等しくても対応する成分のうちどれか一つでも異なれば二つのベクトルは異なる．例えば $[0,1,2]$ と $[0,1,-9]$ は成分の個数が等しいが，第3成分が異なるためこの二つの横ベクトルは異なる．つまり $[0,1,2] \neq [0,1,-9]$ である．

縦ベクトルの場合も同様に二つの縦ベクトルは成分の個数が等しくてそれぞれの成分が等しいとき，そしてそのときに限りこれら二つの縦ベクトルは等しいと呼ぶ．例えば $\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^3 \\ 2^3 \end{bmatrix}$ であり，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ であり，$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ である．

重要注意 3. まず，*(*成分の個数が 2 つ以上ある *)* 縦ベクトルと横ベクトルは等しくないことにかなり注意してほしい．例えば

$$[0,1] \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である．確かにこの二つのベクトル，あるいは成分の個数が等しい縦ベクトルと横ベクトルは適切な方法で**同一視**できるが，**等しいというわけではない**．ここはとても注意してほしい．成分の個数が一個しかない縦ベクトルと横ベクトルは同じものであるのだが，この講義では成分の個数が一個だけのベクトルはそんなに面白いわけでもないので扱わない．

2.1.4　ベクトルの和とスカラー倍

ベクトルの和とスカラー倍 (実数倍) は各成分ごとに行う．

成分の個数が同じベクトル同士しか足し算はできない!これはすぐに習うことになるが，型が等しい行列同士しか足し算できないということでもある．

足し算

まずは和を見てみよう．$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+3 \\ 1+3 \\ 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ このように第 1 成分は第 1 成分同士，第 2 成分は第 2 成分同士で足し算する．第 3, 4, ... 成分も同様のそれらの各成分で足し算するのである．

スカラー倍 (実数倍)

次にスカラー倍を見てみよう．

ベクトルを実数倍する操作は以下のように計算する．$\sqrt{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\times\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\times 4 \\ \sqrt{2}\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

つまり各成分ごとに掛け算してやれば良い．

スカラー倍は $r\mathbb{a}$ と書いたり $r\cdot\mathbb{a}$ と書く．慣例としてスカラー倍は $r\times\mathbb{a}$ と**書かないと思われる．**これはおそらくベクトル同士の掛け算には色々あるので区別するためにこうなっていると思われる．

重要注意 4. ちなみに「スカラー」というのはベクトルではない向きを持たない量のことでである．高校で習った「内積」のようにベクトル同士の掛け算 *(*のようなもの *)* と区

別するためにわざわざスカラー倍という名前になっていると思う．この講義では「内積」それ自体は扱わないと思うが行列の積の特別な場合としてベクトル同士の積 *(*縦ベクトルと横ベクトルの積*)* を扱うこともある．

この講義ではゼロベクトルは $\mathbb{0}$ で書く．o の黒板太字 $\mathbb{o}$ と区別がつきづらいが，$\mathbb{o}$ は使わないので区別はつく．

以下の定理が知られている．

定理 5. ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ はともに成分の個数が同じで，同時にタテあるいはヨコであるとする．そして r, s, t を実数とする．このとき以下が成り立つ．

1. *(*ゼロ*)* $\mathbb{a} + \mathbb{0} = \mathbb{a}$
2. *(*逆元*)* $\mathbb{a} + (-1)\mathbb{a} = \mathbb{0}$ が成り立つ．慣例に従って $(-1)\mathbb{a}$ は $-\mathbb{a}$ と書くことにする．
3. *(*交換法則*)* $\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{b} + \mathbb{a}$
4. *(*結合法則*)* $(\mathbb{a} + \mathbb{b}) + \mathbb{c} = \mathbb{a} + (\mathbb{b} + \mathbb{c})$. この法則があるので，和を足す順番は気にしなくても良い．
5. *(*スカラー倍の結合法則*)* $r(s\mathbb{a}) = (rs)\mathbb{a}$ ここで $\mathbb{a}$ のスカラー倍と r と s の積は違うものであることに注意しよう．この法則があるので，スカラー倍はどの順番で計算しても良い．
6. *(*スカラー倍と和の分配法則その *1)* $r(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = r\mathbb{a} + \mathbb{b}$.
7. *(*スカラー倍と和の分配法則その *2)* $(r + s)\mathbb{a} = r\mathbb{a} + s\mathbb{a}$
8. *(*スカラー倍，1 倍*)* $1\mathbb{a} = \mathbb{a}$
9. *(*スカラー倍，0 倍*)* $0\mathbb{a} = \mathbb{0}$

以上のことは**定理**なのであって本来は証明が必要な事柄だが，証明は省略して結果だけをありがたく使わせてもらうことにする．

第3回　行列

3.1　行列とは

行列とは，数を長方形に並べたものである．例えば

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 8 \end{bmatrix} \text{ や } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \\ 54 & 9 & 0 \\ 78 & 8 & 0 \\ 3 & 65 & 9 \\ 8 & 88 & 3 \end{bmatrix}$$

などである．

ここで注意なのだが，縦ベクトルや横ベクトルも行列の一種である．

また行列を書く場合にはコンマをわざわざ書かないのが慣習となっている．つまり $\begin{bmatrix} 3, & 2, & 3, & 4 \\ 5, & 3, & 8, & 8 \end{bmatrix}$ というふうには書かない! ただし横ベクトルにはコンマを書いたり書かなかったりする．ここら辺は慣習が少々曖昧である．

3.2　行列の型

次に**行列の型**というものを紹介する．

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ は縦方向の成分が 2 つあり，横方向の成分が 4 つある．このようなときこの行列の型は $(2,4)$ 型であるという．つまり整理すると $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ は $(2,4)$ 型の行列である．

行列 $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 10 \\ 1 & 9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ は $(4,2)$ 型の行列である．

注意してほしいのは，$(4,2)$ 型の行列と $(2,4)$ 型の行列は異なる行列ということである．

縦ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ は縦方向の成分が 3 つあり横方向は 1 なのでこの縦ベクトルは $(3,1)$ 型の行列である．

横ベクトル $[1,4,9]$ は縦方向の成分が 1 個で横方向が 3 つなので $(1,3)$ 型の行列である．一般に (m,n) 型の行列を $m \times n$ **型行列**であるとか m **行** n **列の行列**だとかもいう．

3.3　行列の成分; 行列の行と列の数え方

行列の行

数式とはなんでしょうか？実は数式は英文なのです．それゆえ句点を打つときは「。」ではなく英文と同じようにピリオドを打つ．打たない人もいる．「。」を打つ人もいると思う．あのままあとにかく，数式は英文みたいなものなので，英文のような構造を持っていたりします．行列の行と列もその一つです．

以下は日本国憲法の前文の冒頭部分の英訳を一部抜粋したものである[1]．

出典：日本法令外国語訳データベースシステム

(`https://www.japaneselawtranslation.go.jp/ja/laws/view/174`).

We, the Japanese people, acting through our duly elected representatives in the National Diet, determined that we shall secure for ourselves and our posterity the fruits of peaceful cooperation with all nations and the blessings of liberty throughout this land, and resolved that never again shall we be visited with the horrors of war through the action of government, do proclaim that sovereign power resides with the people and do firmly establish this Constitution.Government is a sacred trust of the people, the authority for which is derived from the people, the powers of which are exercised by the representatives of the people, and the benefits of which are enjoyed by the people.This is a universal principle of mankind upon which this Constitution is founded.We reject and revoke all constitutions, laws, ordinances, and rescripts in conflict herewith.

この英文の **4 行目**はどこでしょうか？それは and resolved that never again.... という文章である[2]．このように英文の 4 行目というのは上から数えて 4 番目の文のことをさす．これと全く同様に行列の行も数える．つまり

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

という行列の 4 行目というのは 23 8 0 の部分である．この行列の行をなす部分を**行列の行ベクトル**と呼びベクトルとして $\begin{bmatrix} 23 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ とかく．つまり上の行列の 4 行めの行ベクトルは $\begin{bmatrix} 23 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ である，ということである．

---

[1]著作権を気にしないでよいような英文が手元になかったので憲法を使うことにした．本当はグリーンデイとかカーペンターズとか引用したかった．また，日本法令外国語訳データベースシステムは，法務省が運営する日本の法令の英訳を提供するデータベースである．

[2]日本語で言うとだいたい「再び戦争の惨禍が起ることのないやうに...」の部分である．

英文というのは横書きで左から右に書くものなので，それをわかっていれば行列のどの部分が行なのかはすぐわかると思う．

行列の列

そして**行じゃない方が列である．**列は英語で column とよぶがこれは「柱」のことなので，英語で聞かれれば，行列のどこのこと聞かれているのかよくわかるである．日本語だとよくわからないけど，行じゃない方が列だと覚えてください．それで上の行列の第 3 列目の列ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

である，というふうに言えるのである．

これを踏まえると，行列の型の数え方もよくわかると思う．上の行列は 5 行ある．そして列が 3 列あるので $(5, 3)$ 型の行列である．

行列の成分

行数と列数を指定することで行列の成分を表すことができる．例えば

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

という行列の 4 行目 2 列目の成分は 8 である．これを省略して,「上の行列の $(4, 2)$ 成分は 8 である」というふうに言い表す．

3.4　行列の相等

二つの行列 A と B は，その型が等しくなおかつ各成分がそれぞれ等しいとき，そしてそのときに限り，A と B は等しいという．

例えば成分が 2 つある縦ベクトル $\mathbb{a}$ と成分が 2 つある横ベクトル $\mathbb{b}$ は，それぞれ $(2, 1)$ 型と $(1, 2)$ 型の行列であり，型が異なるので成分がどうであろうとこの二つ $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ は異なる．

さて $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 3+1 & 6-1 & 3+0 \\ 4+1 & 3+4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20+3 & 2^3 & 0 \\ 1+1 & 7 & 3^2 \end{bmatrix}$ はどちらも型が $(5,3)$ 型で対応する各成分も等しいのでこの二つの行列は等しい．つまり $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 6-1 & 3+0 \\ 4+1 & 3+4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20+3 & 2^3 & 0 \\ 1+1 & 7 & 3^2 \end{bmatrix}$ である．

さらに $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ はどちらも同じく $(5,3)$ 型だが，$(4,2)$ 成分が異なるため，これら二つの行列は異なる行列である．つまり $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ である．

3.5　行列の和とスカラー倍

次に行列の和とスカラー倍を紹介する．

足し算

行列の足し算は**型が同じ行列同士にしか定義しない！**行列の和は成分ごとに足し算をすれば良い．

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -9 & -45 & 9 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+(-3) & 5+0 & 3+(-9) \\ 5+5 & 7+4 & 1+1 \\ 0+0 & 0+(-1) & 0+0 \\ 23+(-9) & 8+(-45) & 0+9 \\ 2+1 & 7+4 & 9+5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 10 & 11 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 14 & -37 & 9 \\ 3 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

である．

スカラー倍

スカラー倍 (実数倍) は成分ごとに掛け算をする．

$$3\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot 7 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 0 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 23 & 3\cdot 8 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 7 & 3\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 9 \\ 15 & 21 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 69 & 24 & 0 \\ 6 & 21 & 27 \end{bmatrix}.$$

ゼロ行列

成分が全て 0 であるような (m, n) 型行列を O_{mn} とかく．型がわかっているときには O とかく．また縦ベクトルであるようなゼロ行列は $\mathbb{0}$ と書くこともある．

命題 6. A を行列とし O を A と同じ型のゼロ行列とする．このとき $A + O = A$ が成り立つ．

命題 7. r, s を実数とし，A, B, C を同じ型の行列とする．以下の計算法則が成り立つ．

(1) *(結合法則)* $A + (B + C) = (A + B) + C$. この法則から，この三つの和は単に $A + B + C$ と書くのが慣習である．

(2) *(交換法則)* $A + B = B + A$

(3) *(零行列)* $A + O = A$

(4) *(加法逆元)* $A + (-A) = O$

(5) *(0 倍)* $0A = O$

(6) *(1倍)* $1A = A$

(7) *(スカラー倍の結合法則)* $r(sA) = (rs)A$

(8) *(スカラー倍の分配法則その１)* $r(A+B) = rA + rB$

(9) *(スカラー倍の分配法則その２)* $(r+s)A = rA + sA$

3.6　行列の区分け

行列を「区分け」すると見通しが良くなることがある．
例えば

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 & 7 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

という行列を以下のように区分けする．

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 9 & 1 & 7 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

そして行列 A と B を以下のように定義する．

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

このとき上の区分けを以下のように書くことがある．

$$A = \begin{bmatrix} B & C \end{bmatrix}.$$

常識的に考えるとこの表記はカッコが二重になっているが,「行列の区分け」を考えるときには二重になるカッコは柔軟に無視するのが慣例になっている．他にも縦だけではなく横にも区分けできる．

$$A = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 9 & 1 & 7 & 3 & 7 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

と区分けして

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 & 7 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

及び

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

と定義すれば

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{b} \\ C \end{bmatrix}$$

と区分けできる．

　また，区分けを 2 回も 3 回もやって良い．

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|cc|cc} 0 & 9 & 1 & 7 & 3 & 7 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

として以下のように表示できる．

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{b}_1 & 1 & \mathbb{b}_2 & \mathbb{b}_3 \\ C_1 & \mathbb{c} & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

とかける．区分けのとき $(1,1)$ 型の行列はそのままスカラーで書くのが慣習である．

　よくやる区分けは行ベクトルによる区分けと列ベクトルによる区分けである．つまり

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \mathbb{a}_3 \end{bmatrix}$$

は A を行ベクトルの連なりとして表示して，

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_2 & \mathbb{b}_3 & \mathbb{b}_4 & \mathbb{b}_5 & \mathbb{b}_6 & \mathbb{b}_7 \end{bmatrix}$$

は A を列ベクトルの連なりとして表示している．

第4回　行列の積

4.1　行列の積

4.1.1　お堅い説明

行列の積を導入する．

行列の積は型が異なる行列同士でも定義できるが，定義できるための条件がある!

横ベクトルと縦ベクトルの積

まず最初に横ベクトルと縦ベクトルの積を導入する．これは最も基本的な行列の積である．

成分の個数が同じ n 個の横ベクトル

$$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

と縦ベクトル

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

の積 $\mathbb{ab}$ を内積を参考にして以下のように定義する．

$$\mathbb{ab} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \end{bmatrix}$$

ここで右辺は $(1,1)$ 型の行列である．

重要注意 8. $(1,1)$ 型の行列は通常，スカラー *(*まあ今回の場合は実数*)* と同一視される．というのも，$(1,1)$ 型の行列持ってくるとそれは $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$ というに表されて，この行列と x とを同一視できるからである．この講義ではそのような同一視は**しないことにする．**この講義の内容だとその同一視をあまり使わないからである．

行列と縦ベクトルの積

そして (m,n) 型の行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ と $(n,1)$ 型の行列 (つまり成分が n 個の縦ベクトル) $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ の積 $A\mathbb{b}$ を以下のような $(m,1)$ 型の行列 (つまり成分が n 個の縦ベクトル) として定義する．ここで積の順番は大事である (勝手に $\mathbb{b}A$ とか書いてはいけない).

$$A\mathbb{b} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}.$$

もうちょっとわかりやすくするために $A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{a}_m \end{bmatrix}$ と表示すると積 $A\mathbb{b}$ は

$$A\mathbb{b} = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1\mathbb{b} \\ \mathbb{a}_2\mathbb{b} \\ \vdots \\ \mathbb{a}_m\mathbb{b} \end{bmatrix}$$

と表示できて，横ベクトルと縦ベクトルの積を縦方向に繰り返しているだけであることがわかる.

行列と行列の積

一般に (m,n) 型の行列 A と (s,t) 型の行列 B は $n = s$ **の時にのみ，**(m,t) 型の行列 AB が定義でき，以下のように定義する．B を列ベクトルを並べたもの

$$B = \begin{bmatrix} \mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_2 & \dots & \mathbb{b}_t \end{bmatrix}$$

としたとき AB は

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbb{b}_1 & A\mathbb{b}_2 & \dots & A\mathbb{b}_t \end{bmatrix}$$

と定義する．もうちょっとわかりやすくするために $A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{a}_m \end{bmatrix}$ と表示すると AB はこの縦ベクトルと横ベクトルの積を繰り返しているだけである．

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1\mathbb{b}_1 & \mathbb{a}_1\mathbb{b}_2 & \dots & \mathbb{a}_1\mathbb{b}_t \\ \mathbb{a}_2\mathbb{b}_1 & \mathbb{a}_2\mathbb{b}_2 & \dots & \mathbb{a}_2\mathbb{b}_t \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbb{a}_m\mathbb{b}_1 & \mathbb{a}_m\mathbb{b}_2 & \dots & \mathbb{a}_m\mathbb{b}_t \end{bmatrix}$$

である．

定義を覚えるよりも具体的な計算は１００問くらいやって身体で覚えた方が良いかと思われる．

4.1.2　料金表からの説明

表 4.1: 年齢による映画鑑賞料金の表と動物園の表 (**単位：千円**)A

	一般	大学生	高校生	中学生以下
映画料金	2	1.5	1	1
動物園入場料	0．6	0.6	0．2	0

表 4.2: 色々な世帯の家族構成 (単位：人)B

	サクライ	タカハシ	スズキ	イトウ	ササキ
一般	2	1	3	2	2
大学生	1	0	2	1	0
高校生	1	0	0	0	0
中学生以下	0	4	1	2	0

以上の表 A と B は次のような行列として表すことができる．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

さてここでサクライさん世帯が映画に見にいった時の料金の総額を計算してみよう．次のように計算できる．

$$2 \cdot 2 + 1.5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6.5$$

と計算できる．これは行列の計算と同じ計算である．

全部計算してみよう．

$$AB = \begin{bmatrix} 6.5 & 6 & 10 & 7.5 & 4 \\ 2 & 0.6 & 3 & 1.8 & 1.2 \end{bmatrix}$$

となる．これは 1 列目はサクライ世帯の出費で，1 行目は映画館 2 行目は動物園へ行くときの出費である．2 列目はタカハシ，3 列目はスズキ，4 列目はイトウ，5 列目はササキ世帯の出費である．表にすると以下のようになる．

表 4.3: 各世帯の出費の表 (**単位：千円**)A

	サクライ	タカハシ	スズキ	イトウ	ササキ
映画料金	6.5	6	10	7.5	4
動物園入場料	2	0.6	3	1.8	1.2

こういう (線形な) 表計算は行列の積と関わり合いがある．

4.1.3　計算例

状況その１

まず

$$\mathbb{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

とおく．このとき $\mathbb{a}$ は $(1,4)$ 型，$\mathbb{b}$ は $(4,1)$ 型の行列である．よって積 $\mathbb{ab}$ が計算できてそれは $(1,1)$ 型の行列であり以下のように計算できる．

$$\mathbb{ab} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + (-4) \cdot 3 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

またこのときには積 $\mathbb{ba}$ もちゃんと定義されており，それは $(4,4)$ 型の行列式となる．そしてそれは以下のように計算できる．

$$\mathbb{ba} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot (-4) & 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-4) & 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot (-4) & 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & 6 \\ 5 & 0 & -20 & 15 \\ 3 & 0 & -12 & 9 \\ 5 & 0 & -20 & 15 \end{bmatrix}.$$

この状況というのは行列の積 $\mathbb{ab}$ と $\mathbb{ba}$ が両方定義されている場合だが，そのそれぞれ積の行列の型は全く異なる．

状況その２

料金表の計算の説明から行列を持ってくる．つまり行列 A と B を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

とする．このとき A は $(2,4)$ 型，B は $(4,5)$ 型の行列である．よって積 AB が定義されており，それは $(2,5)$ 型の行列であり，先の説明と同様に

$$AB = \begin{bmatrix} 6.5 & 6 & 10 & 7.5 & 4 \\ 2 & 0.6 & 3 & 1.8 & 1.2 \end{bmatrix}$$

となる．

ところで B は $(4,5)$ 型で A は $(2,5)$ 型なので BA というのは定義されない! (定義されていないのに BA と書くのはおかしいのだがわかりやすさのためにこのように書いている．厳密性を尊ぶならば，B を A に左から掛けることはできないといえばいいのかもしれない)

状況その３

行列 A と B を以下のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

これはどちらも $(3,3)$ 型の行列であるので AB と BA がが両方とも定義できて，この積の両方とも $(3,3)$ 型行列である．計算してみよう．

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．つまり，**この状況というのは，積 AB と BA が定義されており，しかもこれら二つの積の行列の型も等しいが，$AB \neq BA$ となる例である．**

アドバイス：ヨコ線タテ線

慣れるまでは行列の積の左側の行列には横線，右側には縦線を引いて補助輪にすると良い．つまり

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を計算するときに

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 6 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

というふうにヨコ線とタテ線を引いてみて横ベクトルと縦ベクトルの積をイメージして計算してみよう．このノートの執筆者はこの補助のアイデアを嶺幸太郎氏の講義ノート [8] で見て，取り入れた．

単位行列と結合法則

1 以上の自然数 n について E_n という (n, n) 型行列を以下のように定義する．

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

つまり，第 (i, i) 成分が 1 でそれ以外が 0 の行列である．例えば，

$$E_1 = [1]$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である.

このとき以下のことが成り立つ.

命題 9. n を 1 以上の自然数とし l, m を自然数とする．A を (l, n) 型の行列とし，B を (n, m) 型の行列とする．このとき以下が成り立つ.

$$AE_n = A,$$

$$E_l B = B.$$

また行列の積についても以下の結合法則が成り立つ.

命題 10. l, m, n, w を自然数として A を (l, m) B を (m, n) C を (n, w) 型の行列とする．このとき以下が成り立つ.

$$A(BC) = (AB)C.$$

命題 11. 以下の計算法則が成り立つ.

(1) *(単位行列)* $AE = EA = A$

(2) *(零行列との積)* $OA = AO = O$

(3) *(結合法則その１)* $A(BC) = (AB)C$

(4) *(結合法則その２)* $a(AB) = (aA)B$

(5) *(スカラー倍と行列の積)*
$(aA)(bB) = (ab)AB$

(6) *(積の分配法則その１)* $A(B + C) = AB + AC$

(7) *(積の分配法則その２)* $(A + B)C = AC + BC$

第5回　行基本変形

5.1　行に関する基本変形

連立方程式は以下の操作を複数回繰り返しても同値な方程式の変形でしかない．

1. $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq 0)$ を実数として 1 つの方程式を r 倍する．ただし 0 倍はやってはいけない．
2. 二つの方程式を入れ替える．
3. 一つの方程式に他の方程式の $r \in \mathbb{R}$ 倍を加える (0 倍を加えることも許容するが，それは何の意味もない操作である)．

例えば

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

の第一式を (1/2) 倍すると

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

となる．この連立方程式は元の方程式と同値である．つまり，元の方程式と解は変わらない (より正確にいうと解が存在するかどうかも変わらない)．さらに

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

の第一式から第二式を引くと

$$\begin{cases} 0x + y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

という方程式と同値になる．第二式から第一式を引くと

$$\begin{cases} 0x + y = -1 \\ x + 0y = 3 \end{cases}$$

そして第一式と第二式を入れ替えると

$$\begin{cases} x + 0y = 3 \\ 0x + y = -1 \end{cases}$$

となり，解が $x = 3,\ y = -1$ であることがわかる．これが連立方程式の加減法である．

以上を観察すると，連立一次方程式を解くためには，変数の係数と右辺に現れる数だけを見れば良いことがわかる．実は連立一次方程式から行列を作ってその行列を変形することで連立一次方程式が解ける，あるいは解が存在しないことなどが判定できる．本来は連立一次方程式に付随する係数拡大行列の行基本変形の話をするべきだが，行に関する基本変形自体は別にただの行列に関しても考察できるので，これからは一旦連立一次方程式のことは忘れてただの行列の行基本変形を説明する．

以上の加減法を参考にして行列の行基本変形を定義する．

行列に関する行基本変形とは以下の三種類の操作のことを指す.

1. $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq 0)$ を実数として行の 1 つを r 倍する．ただし 0 倍はやってはいけない．
2. 二つの行を入れ替える．
3. 一つの行に他の行の $r \in \mathbb{R}$ 倍を加える (0 倍を加えることも許容するが，それは何の意味もない操作である)．

これら三種類の操作を**組み合わせて**，行列 A に施して行くことを**行列 A を行基本変形する**という．組み合わせなのでこれら三種類の操作を何回も行っても良い．変形する順番は大事である．操作の順番を入れ替えると変形された行列が異なることがある．

行基本変形をすると言っても変形したからなんだと思われるが，大事なことは行基本変形を用いて行列を**より簡単な行列に変形するということである．**なので最終的には行列を行基本変形を用いて簡単な形をしている行列に変換するという話をしたい．その，より簡単な行列というのは，また後で話すことにして，これら三種類の変換の具体的な計算例を見ていこう．

重要注意 12. これら三種類の操作は連立一次方程式の加減法による連立一次方程式の変形を行列の言葉に変換したものと見做せる．

例

操作その１.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

とおく．A の第二列を 1/3 倍する操作は行基本変形である．これを施すと A は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

になる．注意して欲しいのは，行基本変形した後の行列は (一般には) 元の行列とは**等しくない**ということである．上の行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ は A から行基本変形を施して得られた行

列だがこれは A には等しくない．一般に行基本変形を施したという意味の記号はないようだ．とりあえずこのノートでは以下のように書く

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行を }1/3\text{ 倍}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

別に「第二行」は「第 2 行」と書いてもよい．また筆記を楽にするために以下のようにも書くことを許容する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\times(1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで R とは Row，これは行列の行の英語であるが，の頭文字であり，R_2 の 2 は二行目であることを示している．面倒だと思うが，他の略記法との兼ね合いがあるので，$R_2\times(1/3)$ の $\times$ は省略せずに書くことにする．カッコは省略してもよい．つまり $R_2\times 1/3$ でもよい．

操作その 2．

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ の第一行と第二行を入れ替えると以下の行列に変形される．

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

このことをこのノートでは以下のように書こう．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一行と第二行をいれかえ}} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

このノートでは以下のような略記を許容する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

つまり $R_1 \leftrightarrow R_2$ という記号で第一行と第二行を入れ替えるという操作を表している．この場合 $R_2 \leftrightarrow R_1$ と書いてもそれは結局 $R_1 \leftrightarrow R_2$ と同じである．これは「第一行と第二行を入れ替える」ことは「第二行と第一行を入れ替える」ことと同じだからである．

操作その 3．

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ の第二列に第一列の -3 倍を加える操作を施すと以下の行列になる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

別に「第二列から第一列の三倍を引く」と書いてもよい．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二列に第一列の }-3\text{ 倍を加える}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

このノートでは以下のような記法も許容する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+(-3)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ここで $R_2 + (-3)R_1$ は $R_2 - 3R_1$ と書いても良い．

ただしこれ和の順番を変えるとどこに何を足しているのかわからなくなるので**この略記法を使うときには，足される行は必ず左側に書くことにする．**

以上の操作を複数回繰り返したものも行列の行基本変形による変形と呼ぶ．この行列 A を行基本変形で変形していこう．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二列に第一列の }-3\text{ 倍を加える}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二列を }1/3\text{ 倍する}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第一列から第二列を引く}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一列と第二列を入れ替える}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

略記法を用いると以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\times(1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ちなみにこの略記法は [1] を参考にした．

5.2　行基本変形を用いた列の掃き出し

この節では**行列の成分を用いた列の掃き出し**というものを定義する．これは連立一次方程式の解法を述べる上でとても大事な方法である．連立一次方程式の言葉で直すと掃き出しとは，**一つの変数の消去**に相当する．

今から具体例でもって掃き出しのやり方を見てみよう．行列 A を以下のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

このとき**第** $(1,1)$ **成分を中心とする第** 1 **列の掃き出し**とは以下のように，第 $(1,1)$ 成分を基点として，これを含む列 (この場合は第一行) をその指定された成分以外を 0 にするよ

うな行基本変形を指す．**ここで第 $(1,1)$ 成分が 0 ではないことに注意しよう．**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\times(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

ここで $(1,1)$ 成分と $(3,1)$ 成分が同じ 2 という値であるから以下のように変形しても良い．

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\times(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

つまり，第 $(1,1)$ 成分を使って他の第一列の成分を 0 にした上で，第 $(1,1)$ 成分を 1 にするという行基本変形のことである．以下のことが知られている，あるいは容易に証明できる．

命題 13. 行列 A を任意に与える．そして A の (p,q) 成分 a_{pq} は 0 ではないとする．このとき (p,q) 成分を中心とした A の掃き出しについてはどのような行基本変形の操作の順番にしようとも，結果となる行列は変わらない．

ちなみに第 $(2,4)$ 成分を中心とする第 4 列の掃き出しは以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

重要注意 14. この行列 A の第 $(1,4)$ 成分は 0 であるが，このような場合は，第 $(1,4)$ 成分を用いた第 4 列の掃き出しはできないことに注意しよう．

第6回　簡単な行列への変形

6.1　主成分

行基本変形を使って行列を「簡単な」行列に変換することを考える．どのような行列が簡単な行列なのだろうか？行列の和や積を考えるにどうやら**成分に** 0 **がなるべく多くなるような行列**が簡単な行列と言えそうである．

その前に補助的に行列の行の主成分というものを定義する．

定義 15. 行列 A の**第** i **行目の主成分**とは A の第 i 行ベクトルのうち，左から数えて，初めて現れる 0 ではない成分のことである．

例えば

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

の第一行目の主成分は -1 である．第二行目の主成分は 1，第三行列の主成分は 1 で第四行列の主成分は 6 である．

6.2　階段行列

主成分の概念を踏まえて以下のように**階段行列**を定義する．

定義 16. 以下の (m,n) 型の行列 A を考える．

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

このとき A が**階段行列**であるとはある $\{1,\dots,n\}$ に値をとる数列 $\{h_i\}_{i=1}^m$ が存在して以下を満たすことである．

1. もしも $h_i < n$ ならば $h_1 < h_2 < \cdots < h_i$ である．

2. もしも $h_i = n$ であるならば $h_i = h_{i+1} \cdots = h_m$ である．

3. 任意の $j \leq h_i$ について $a_{ij} = 0$.

さらに言い換えると以下のような行列である．

1. ゼロベクトルになっている行ベクトルは，そうではないベクトルの下の行に必ず位置する．ゼロベクトルとなる行はこのルールを満たしているのなら何本あってもよい．

2. 第 i 行目の行ベクトルの主成分が第 j 列名に現れるとすると第 $i+1$ 行目の行ベクトルはゼロベクトルかもしくはその主成分は第 j 列目より右に位置する．つまり $j+1,\ j+2\ldots$ のいずれかの列に現れる．つまり第 i 行の主成分を a_{ij} とすると第 $i+1$ 行目の主成分は $a_{ij+1},\ a_{ij+1}\ldots a_{in}$ のどれかである．

つまり大体以下のような行列のことである．

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ゼロではない成分が階段上に並んでいることから階段行列と呼ばれる．例えば

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は階段行列ではない．

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

という部分が階段行列の定義に反する．**階段が 2 段一気に下がるのはダメなのである．** ただし下の部分はゼロベクトルであるような行ベクトルがいくら積み重なっていても構わない．つまり

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

などは階段行列である．

以下の定理がある．

命題 17. *どんな行列 A についても，A を行基本変形することによって (A と同じ型を持つ) 階段行列に変形することができる．*

第7回　簡約行列

7.1　簡約行列

前回で階段行列を導入したが，もっと簡単な行列に変形できないだろうか.

定義 18 (簡約行列，既約階段行列). 以下の (m,n) 型の行列 A を考える.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

このとき A が**簡約行列**あるいは**既約階段行列**であるとは以下の条件を満たすときにいう.

1. A は階段行列である.
2. A の各行の主成分は 1 である.
3. 各行の主成分を含む**列**は，その主成分以外の成分は 0 になっている.

例えば

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は階段行列だが簡約行列ではない．主成分に 2 が入っているからである.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

も階段行列だが簡約行列ではない．第二列の主成分を見るとこれは第 4 列にあるが，この列には第二列の主成分以外にゼロではない成分があるので簡約行列ではない.

以下の行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 100 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は**簡約行列である．**

簡単にいうと**簡約行列とは，行の基本変形でもうこれ以上簡単にできないような行列のことである．**あるいは**列の掃き出しによってそれ以上簡単にすることができない行列のことである．**

実は以下のような定理が知られている．

定理 19. 行列 A に対して，それに行基本変形を施して簡約行列 B が得られたし，別の行基本変形を施して簡約行列 C が得られたとする．このとき $B = C$ である．

上の定理から，計算過程の行基本変形がどのようであっても最終的に得られる簡約行列は同じであることがわかる．

7.2　階数

また簡約行列を用いて以下のように行列の**階数**を定義する．この概念は連立一次方程式の解の自由度と深く関連している．

定義 20. 行列 A の階数とは，行列 A に対応する簡約行列の主成分の個数である．あるいは同じことだが，その簡約行列のゼロベクトルではない行ベクトルの個数が階数である．

7.3　簡約行列へ変形するときのアルゴリズム

行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

を簡約行列に変形するときのアルゴリズムは以下の通りになる．

1. まず最初に注意するが，以下の各過程においてゼロベクトルであるような行ベクトルが現れたらそれは下部の行へ移動させる．
2. 一番左側にある主成分を探す．複数個ある場合にはどれを選んでも良い．ただし，いろいろな事情により簡単に計算できそうな行があればそれを使う．例えば成分が 1 であるとか，行ベクトルの成分に 0 が多いとかなど．
3. その選んだ主成分を持つ行ベクトルを最上段に持ってくる．
4. その成分を使って第一列の他の成分を 0 にする．つまり掃き出しを行う．
5. 最後にスカラー倍をしてその成分を 1 にする．これは掃き出しと順番が前後しても良い．

6. 第1行はもはや他の行と交換しない．
7. 第1行以外の行列の部分から最も左側にある主成分を探す．複数ある場合は自分で選ぶ．これを第2列に移動させて掃き出す．これ以降は第2行は交換しない．
8. 以下この操作を実行不能になるまで繰り返す．

例を見てみよう．以下の行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を簡約行列に変形しよう．まず第一列で掃き出しをするのだが，2を使うより1を使ったほうが楽なので入れ替えを行う．また，行ベクトルのゼロではない成分が少ないほうが計算が楽なので第3行を用いて掃き出しを行う．

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と変形できる．よって A から得られる簡約行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．そして階数は3である．

行の交換をせずに A を変形してみよう．上述の定理によれば同じ簡約行列が得られるはずである．

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \times (1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 - R_2, R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので，同じ簡約行列が得られた．

第8回　この回はスキップする

出張のため休講である.

第9回　中間テスト

この回は中間テストの予定である．テストに関する情報は伏す.

第10回　行列を用いた連立方程式の解法

10.1　連立一次方程式

行列を用いて連立一次方程式を解く．
今までベクトルの和や行列の積を解説してきたのはこの連立一次方程式のためであった．
連立一次方程式を解くのには以下の方法があるらしい．

1. 代入法
2. 加減法

正直なところこれら二つは全く同じものだと私は思うのだが，まあとにかく，この講義では加減法のことを連立方程式の良い解き方だと思うことにして加減法で連立方程式を解く方法を行列と絡めて考察してみる．

本当は解き方を復習したいところだが時間がないので，省略する．加減法とか代入法がわからなくてもこれから学ぶ係数拡大行列の行基本変形による解法は学べるし中学の数学を忘れていてもこの係数拡大行列の話さえ分かれば良い．

加減法の例

以下の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

この連立方程式の第二式から第一式の 3 倍を引くと以下の連立方程式に帰着する．

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 0y = -3 \end{cases}$$

そして第二式を 1/3 倍すると以下の連立方程式になる．

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 0y = -1 \end{cases}$$

そしてこの連立方程式の第一式から第二式を引くと

$$\begin{cases} 0x + y = 3 \\ x + 0y = -1 \end{cases}$$

となる．そして第一式と第二式を入れ替えると

$$\begin{cases} x + 0y = -1 \\ 0x + y = 3 \end{cases}$$

これで最初の連立方程式の解が

$$x = -1, y = 3.$$

となることがわかる．以上が加減法による連立一次方程式の解法のあらましである．これを行列とベクトルの言葉に変換しよう．まず，未知数 x と y の組みを縦ベクトルで

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とかこう．すると連立方程式の $x + y$ と $3x + 6y$ の部分は行列の積を思い出すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 6x + 3y \end{bmatrix}$$

となるので，連立方程式の左側を縦ベクトルだと思うことにすると，上の連立方程式は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

となる．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

とおくと上の連立方程式は

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

というベクトルに関する方程式になる．このとき A を (上記の連立一次方程式に関する) **係数行列**と呼ぶ．

ここまでで，連立一次方程式を「行列とベクトル」の言葉に変換することができた．逆に（行の数が同じであるような）行列とベクトルを持ってくるとそこから未知数を適当に見繕って連立一次方程式を作ることができる．さて，A と $\mathbb{b}$ の情報さえあれば連立一次方程式は未知ベクトルに適当に記号を与えてやれば復元できるので，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ という方程式は本質的には A と $\mathbb{b}$ が決定するということがわかる．よって未知ベクトルを除いてさらに A と $\mathbb{b}$ を以下のように一緒に書くことにする．

$$\begin{bmatrix} A & \mathbb{b} \end{bmatrix}$$

このまた行列とベクトルを明確に区別して

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$$

と書くこともある．**この講義ではわかりやすくするために縦線を書いた方を用いることにする．**この行列

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$$

を (考えている連立一次方程式の) **係数拡大行列**と呼ぶ.

以上のことから連立一次方程式と行列 A とベクトル $\mathbb{b}$ に関する，$\mathbb{x}$ を未知ベクトルとする方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は本質的に同じものであるとみることができる．さらにこれは係数拡大行列

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$$

と同じものとみることができる．上記の連立一次方程式に関する係数拡大行列は

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

になる.

$$\text{連立一次方程式} \overset{\text{(適切な操作のもと) 同じ}}{\longleftrightarrow} A\mathbb{x} = \mathbb{b} \overset{\text{(適切な操作のもと) 同じ}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$$

他にも例えば x_1, x_2 を未知数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$$

に対する係数拡大行列は

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

になる.

さらに s_1, s_2, s_3 に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 9 \\ 2s_1 + s_2 + 5s_3 = 2 \end{cases}$$

に対する係数拡大行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

になる.

重要注意 21. 以上の連立方程式から係数行列及び係数拡大行列を作る話は，実は変数の順番を固定しないと答えが一意的には定まらない．係数行列の部分を列の交換した数だけ係数行列が現れる．とりあえずこのノートでは**常識的な順番**で変数の順序を固定することにする．この注意は数学的にはあまり意味のないものである．つまり数学的には変数の順番は結構どうでもいい．ただし数学的にあまり意味がないというのは，数学以外の部分については問題が発生しうるという意味でもある．今回の場合，順番を固定しないと初学者に厳しい内容になるやも知れぬ．

よって連立一次方程式に関することは $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$ の話に変換できるし，逆も然り．

それでは上で説明した**連立一次方程式の加減法による解法**は行列とベクトルに関してどのような概念に対応するのだろうか? それは**行列の行に関する基本変形である．**また上の例では解が一意的に定まる連立一次方程式だったが，解が無数にたくさんある連立一次方程式や解を持たない連立一次方程式についても，その係数拡大行列の情報からそれらのことの判定ができる．具体的には大まかには以下のような対応関係がある．

$$\begin{aligned}
\text{連立一次方程式} &\xleftrightarrow{\text{同じ}} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right] \\
\text{加減法} &\xleftrightarrow{\text{同じ}} \text{行の基本変形} \\
\text{解が存在する} &\xleftrightarrow{\text{同値}} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right] \text{の階数が } A \text{ の階数と一致する} \\
\text{解が存在しない} &\xleftrightarrow{\text{同値}} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right] \text{の階数が } A \text{ の階数と一致しない}
\end{aligned}$$

階数だとかの話はおいおい学ぶだろう．これからは行列を用いて連立方程式を解くことを考える．

10.1.1　行列を用いた連立一次方程式の解法

連立一次方程式から係数拡大行列を作ってその係数拡大行列の簡約行列を求めると元の連立方程式がとける．

以下のような手順になる．

1. 連立方程式から係数拡大行列を作る．変数の順番は常識的な順番とする．
2. 作った係数拡大行列を行基本変形を用いて簡約行列にする．
3. 簡約行列から連立方程式の情報を読み取る．簡約行列の形から連立一次方程式の会が以下の三つのパターンに分かれていることを分析する．
   (a) 解が存在しない．
   (b) 解が存在する．そしてそれはこの連立方程式のただ一つの解である．ちなみにこのパターンは方程式の個数が変数の個数と等しいか大きいときにしか起こり得ない．

(c) 解が存在する．そしてそれは無数に存在する．このときは解の形と解の自由度まで述べよう．

また，解が存在する場合には，**簡約行列の主成分に対応する変数について方程式を解いて (移項して) 答えを書き下す．**

それぞれのパターンを見ていこう．例を書く．

解が存在しない

以下の各場合においては係数拡大行列を作って簡約行列を求める部分は省略する．

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$$

を考える．この連立一次方程式の係数行列は $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ である．係数拡大行列は

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

である．この行列の簡約行列を求めてみよう．

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\times(-1)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

となる．これは上記の連立一次方程式が同値な変形 (加減法) によって

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 0x+0y=1 \end{cases}$$

というふうに変形されたということである．この方程式の 2 番目は $0=1$ という式なので，あり得ない．これはどういう意味かというと，上記の連立一次方程式を満たすような x と y は存在しないという意味である．

回答としては「もしも解が存在すると仮定すると $0=1$ という方程式が成り立つので矛盾する．よってこの連立方程式には解は存在しない」と書くといいと思う．

実は以下の定理が存在する．

定理 22. 考えている連立方程式の係数拡大行列を $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$ とする．そしてこの係数拡大行列を行基本変形を用いて簡約行列 $\left[\begin{array}{c|c} M & \mathbb{c} \end{array}\right]$ に変形できたとしよう．このとき以下は同値である．

1. 考えている連立一次方程式に解が存在しない．

2. A の階数と $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$ の階数が異なる．このとき必然的に $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$ の階数は (A の階数) $+1$ という値になる．

3. $\left[\begin{array}{c|c} M & \mathbb{c} \end{array}\right]$ の一番最後の列ベクトル $\mathbb{c}$ に主成分が含まれている．

実際，$\left[\begin{array}{c|c} M & \mathbb{c} \end{array}\right]$ の一番最後の列ベクトル $\mathbb{c}$ に主成分が含まれているとするとそれは，連立方程式に翻訳して考えると，考えている連立方程式を同値変形 (加減法) した結果 $0=1$ という方程式が含まれているということになるので，考えている連立一次方程式の解は存在しない．

解がただ一つ存在する

最初に考えた連立方程式を見てみよう．

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 6x+3y=3 \end{cases}$$

この連立方程式の係数行列は $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ であり，係数拡大行列は

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

となる．この行列を行基本変形して簡約行列を求めよう．

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\times(1/3)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_2\times(-1)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

よって，上記の連立方程式は

$$\begin{cases} x+0y=-1 \\ 0y+y=3 \end{cases}$$

と変形され，答えが $x=-1$, $y=3$ となる．これは連立一次方程式の解が存在しなおかつそれがただ一つである場合である．

解が無数に存在する

次の三変数の連立一次方程式を考えよう．

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

この連立方程式の係数行列は

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

であり，係数拡大行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

である．この行列を簡約行列に変形していこう．

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

となる．よって上記の連立方程式は

$$\begin{cases} x+y+0z=-2 \\ 0x+0y+z=2 \end{cases}$$

このような時は，主成分に対応する変数を見る．第一行の主成分は第一列にあるので，x に対応し，第二成分の主成分は第三列にあるので，z に対応する．主成分に対応していない変数 y については，任意定数 c を取ることにすると，この連立方程式の解は $x=-c-2$,$y=c$, $z=2$ となる．つまり，この連立方程式の解全体の集合は集合

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| x=-c-2,\ y=c,\ z=2,\ \text{ここで } c \text{ は任意の実数} \right\}$$

と一致する．あるいはこの集合は以下のように書いても良い．

$$\left\{ \begin{bmatrix} -c-2 \\ c \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \text{ここで } c \text{ は任意の実数} \right\}.$$

他にも,「この方程式の解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c-2 \\ c \\ 2 \end{bmatrix}$$

である．ここで c は任意の実数である.」と答えても良い．**テストではこちらの答え方で答えてください.**

この解の集合には c という任意の実数が一つ入っている．このような任意の実数の個数を**その連立一次方程式の解の自由度と呼ぶ．**解の自由度については以下の公式がある．

$$(\text{連立方程式の変数の個数}) - (\text{階数}) = (\text{連立方程式の解の自由度})$$

今この状況においては変数の個数は x, y, z の 3 で，階数は 2 である．よって解の自由度は 1 になるのである．

以上で解が存在する場合を扱ったが，以下の定理がある．

定理 23. 考えている連立方程式の係数拡大行列を $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$ とする．そしてこの係数拡大行列を行基本変形を用いて簡約行列 $\left[\begin{array}{c|c} M & \mathbb{c} \end{array}\right]$ に変形できたとしよう．このとき以下は同値である．

1. 考えている連立一次方程式に解が存在する．

2. A の階数と $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{b} \end{array}\right]$ の階数が一致する．

3. $\left[\begin{array}{c|c} M & \mathbb{c} \end{array}\right]$ の一番最後の列ベクトル $\mathbb{c}$ に主成分は含まれない．

さらに，この状況において，以下のように解が一意的に存在するか，無数に存在するかの判定法がある．つまり，考えている連立方程式の *(解の自由度)* は以下の式で計算される．

$$(\text{連立方程式の変数の個数}) - (A\,\text{の階数}) = (\text{連立方程式の解の自由度}).$$

補足として，ここで解の自由度が 0 であるとは，解が一意的に存在するということである．

第11回　連立一次方程式の解法の続き

続きをする．

連立一次方程式の解法は重要なので重複を恐れずに続きをする．この解法というのは，大まかに３パターンに分かれており，かなり話が長くなるので，２回に分けることを予定している．この２回目の回では，主に変数が４個や５個ある方程式について解説を行う．

第12回　逆行列

12.1　定義

逆行列を定義する．

定義 24. n を整数とする．このとき n 次正方行列 A のの逆行列とは $AB = E_n$ を満たす行列 B のことである．このような行列は存在するのであればただ一つしか存在しないことが知られている．逆行列は A^{-1} で表すことにする．実は逆行列について $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ となることが知られている．**一般に行列に常には逆行列が存在するわけではない．**

逆行列は変数と方程式の数が同じであるような連立一次方程式の解法としても使えるし，あるいは座標変換にも使える．

逆行列の例

例えば行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ となる．実際に $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ を計算すると確かに $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．

12.2　逆行列の求め方：二次行列

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に関して量 $ad - bc$ を**二次行列 A の行列式**とよび，$|A|$ や $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ と書く．二次行列については以下の便利な定理がある．これはお得なので覚えよう．かなり覚え得．

命題 25. *二次行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が逆行列を持つための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である (これは $ad - bc \neq 0$ という意味)．さらにこのとき*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & -a \end{bmatrix}$$

である．

証明. 実際以下の計算をしてみる.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & -a \end{bmatrix}$ がわかる. □

計算例

その 1．行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の行列の逆行列が存在するか判定し，存在する場合は逆行列を求めよう．行列式を計算すると $|A| = 2\cdot 3 - 7\cdot 2 = 6 - 14 = -8$ なので $|A| \neq 0$ となるので A は逆行列を持つ．それは $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ である．

その 2．行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の逆行列が存在するか判定し，存在する場合は逆行列を求めよう．行列式を計算すると $|A| = 0$ なので二次行列 A には逆行列は存在しない．

重要注意 26. 三次以上の行列に対しても行列式は定義できるが，この講義ではおそらく扱わない.

12.3　逆行列の求め方：三次行列

3 次以上の正方行列について逆行列をどのように求めるのか考えてみよう．話を簡単にするために 3 次行列 A で考える．このとき A に逆行列 B があると仮定しよう．この B の成分は全て未知なのでこれを求めることを考える．すると

$$AB = E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{e}_1 & \mathbb{e}_2 & \mathbb{e}_3 \end{bmatrix}$$

となるわけである．ここで B を列ベクトルで表示して

$$B = \begin{bmatrix} \mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_2 & \mathbb{b}_3 \end{bmatrix}$$

とすると

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbb{b}_1 & A\mathbb{b}_2 & A\mathbb{b}_3 \end{bmatrix}$$

となるので結局上の式は

$$\begin{bmatrix} A\mathbb{b}_1 & A\mathbb{b}_2 & A\mathbb{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{e}_1 & \mathbb{e}_2 & \mathbb{e}_3 \end{bmatrix}$$

となる．これはつまり三つの三元連立一次方程式

$$A\mathbb{b}_1 = \mathbb{e}_1$$

$$A\mathbb{b}_2 = \mathbb{e}_2$$

$$A\mathbb{b}_3 = \mathbb{e}_3$$

を同時にとくことに帰着するのである．ここで $\mathbb{b}_1$ $\mathbb{b}_2$ $\mathbb{b}_3$ は全て未知数で書かれていると思ってください．

それで前回までに述べた連立方程式の解き方をなぞると三つの係数拡大行列

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{e}_1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{e}_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{e}_3 \end{array}\right]$$

を同時にでも順番にでも解くと $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ を求めることができて結局 B がわかる．しかしながらこれらの連立方程式は結局係数行列 A が同じであるので，これらを行基本変形するのは結局一番右端の行を除いて同じ操作を 3 回繰り返す羽目になるはずである．よってこれら三つを同時に扱うために以下のようなさらに拡大した行列を考える．

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & \mathbb{e}_1 & \mathbb{e}_2 & \mathbb{e}_3 \end{array}\right]$$

ただし $\mathbb{e}_i$ の定義を考えるとこれは

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E_3 \end{array}\right]$$

と同じである．

これを行基本変形して簡約行列にすれば良い．実は以下の定理が知られている．

定理 27. n 次正方行列 A について，以下は同値である．

1. A は可逆である．
2. A の階数が n である．
3. A から得られる簡約行列は E_n になる．

これを踏まえると，正方行列 A についてこれの可逆性と逆行列を同時に決定するアルゴリズムが得られる．

1. 拡大行列
$$\left[\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array}\right]$$
を考える．

2. そして**行列 A の部分を簡約にする行基本変形の操作を加える．**得られた行列を

$$\left[\begin{array}{c|c} L & R \end{array}\right]$$

とする．しかしながらそもそも A が可逆の場合には A の簡約行列は E_n に等しくなりそこまでで簡約は止まるはずであり，それ以上簡約を勧められてしまうのは A が可逆じゃないということである．

3. もしも $L = E_n$ ならば A は可逆行列であり，$R = A^{-1}$ になっている．もしも L が E_n と異なるのであれば A は可逆ではなく，つまり A の逆行列は存在しない．この場合 R にはあまり意味はない (ただし，実は $RA = L$ が満たされる).

「もしも $L = E_n$ ならば A は可逆行列であり，$R = A^{-1}$ になっている.」のところを少し解説する．上の 3 次行列の説明を引き継ぐ．仮定から A の簡約行列は E_3 になるということなので，

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{e}_1 \end{array}\right]$$

の簡約行列は

$$\left[\begin{array}{c|c} E_3 & \mathbb{r}_1 \end{array}\right]$$

という形をしている．これが $\mathbb{b}_1$ を求めるための連立方程式なのだが，係数行列が E_3 なので $\mathbb{b}_1 = \mathbb{r}_1$ でなければならない．これは他の番号でも同じなのでこの状況では B を A の逆行列としたので R は $R = B$ を満たす．つまり $R = A^{-1}$ である．

重要注意 28. 正方行列 A に逆行列があった場合には連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{a}$ は左から A^{-1} をかけることによって $\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{a}$ というふうに行列の掛け算をするだけで答えが得られる．しかしながら，逆行列をかけて連立一次方程式を解きたいはずなのに逆行列を求めるために連立一次方程式を解く必要があり，苦労が二度手間になっている．また行列の積も結構手間がかかるので，逆行列を使って連立方程式を解くのはそこまでお勧めしない．一方で座標の変換などを考える場合には，逆行列を求めておいた方がいい場合もあるので，問題によって使い分けよう．

計算例その１

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めてみよう．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&5&0&1&0\\2&1&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&5&0&1&0\\0&1&1&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&-2&0&1\\0&2&5&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&-2&0&1\\0&0&3&4&1&-2\end{array}\right]\xrightarrow{(1/3)R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&-2&0&1\\0&0&1&4/3&1/3&-2/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/3&-1/3&2/3\\0&1&1&-2&0&1\\0&0&1&4/3&1/3&-2/3\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/3&-1/3&2/3\\0&1&0&-10/3&-1/3&5/3\\0&0&1&4/3&1/3&-2/3\end{array}\right]$$

よって $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1/3&-1/3&2/3\\-10/3&-1/3&5/3\\4/3&1/3&-2/3\end{bmatrix}$ である．また，

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&-1&2\\-10&-1&5\\4&1&-2\end{bmatrix}$$

と書いてもいい．**とてもかなり計算ミスしやすので気をつけよう！**

実際に AA^{-1} を計算するとちゃんと単位行列 E_3 になる．

計算例その２

次に行列 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\2&1&1\end{bmatrix}$ の逆行列を求めてみよう．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&-1&1&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&-1&1&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&-1&1&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right]$$

と変形できる．このとき，A の階数が 2 であるので，A は逆行列を持たない．

第13回　線形独立と線形従属

13.1　線形結合

ここではベクトルの線形独立性を簡約行列を用いて判定する．

定義 29. n を 1 以上の整数とする．このとき記号 $\mathbb{R}^n$ で成分が n 個であるようなタテベクトル全体の集合を表す．つまり

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \text{ は実数である.} \right\}$$

定義 30. $\mathbb{R}^n$ の元であるような k 個のベクトルたち $\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k$ について，スカラー $c_1, \dots, c_k$ を用いた和

$$c_1\mathbb{a}_1 + \dots c_k\mathbb{a}_k$$

を，$\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k$ **の線形結合という．**さらにベクトル $\mathbb{b}$ に対して，ある $c_1, \dots, c_k$ が存在して $\mathbb{b} = c_1\mathbb{a}_1 + \dots c_k\mathbb{a}_k$ と表されるとき，$\mathbb{b}$ **は** $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k$ **の線形結合で表されるという．**

この回ではベクトルたち $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k$ **とベクトル** $\mathbb{b}$ **について，どういう状況で** $\mathbb{b}$ **が** $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_k$ **の線形結合でかけるのかというのを考察する．本質的には連立一次方程式の解が鍵を握る．**

13.2　線形独立性

今 $\mathbb{R}^n$ の元であるような k 個のベクトルたち $\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k$ について，ゼロベクトル $\mathbb{0}$ をこれらのベクトルたちで表す方法を考えてみよう．すると $c_1 = \dots = c_k = 0$ という係数を考えると $\mathbb{0}$ は先のベクトルの線形結合で表されることがすぐにわかる．それでは，この「全部ゼロ」という係数以外に $\mathbb{0}$ の，線形結合としての表し方があるのか考える．実は以下のように「全部ゼロ」以外に係数がないような時には線型独立と特別に呼ばれているのである．

定義 31. $\mathbb{R}^n$ の元であるような k 個のベクトルたち $\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k$ について以下の条件を考える．

$$c_1\mathbb{a}_1 + \dots c_k\mathbb{a}_k = \mathbb{0}.$$

このときこの条件を満たす状況が,「$c_1, \dots, c_k$ が $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$」という場合以外にはないとき，$\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k$ は**線形独立**であるという．線形独立ではないとき，つまり,「c_i

が全部 0 という状況」以外で上の条件を満たす $c_1, \ldots, c_k$ が存在するときには，$\mathbb{a}_1, \ldots \mathbb{a}_k$ は**線形従属**であるという．つまり線形従属というのは，c_i のうちどれか少なくとも一つがゼロではなく，さらに上の条件を満たすときに言うということである．このような和

線形独立性の判定について次の定理がある．実は連立一次方程式を関係するのである．線形独立性の解が「全部ゼロ」以外に存在しないというのは，連立一次方程式における「解の自由度が 0」というのと同じなのである．

定理 32. $\mathbb{R}^n$ の元であるような k 個のベクトルたち $\mathbb{a}_1, \ldots \mathbb{a}_k$ が線形独立であるための必要十分条件は行列

$$\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \ldots & \mathbb{a}_k \end{bmatrix}$$

の階数がちょうど k になることである．

証明. この定理は連立一次方程式の話で理解することができる．今 $A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \ldots & \mathbb{a}_k \end{bmatrix}$ とおこう．そして

$$c_1\mathbb{a}_1 + \ldots c_k\mathbb{a}_k = \mathbb{0}.$$

を考える．これは以下の $c_1, c_2, \ldots, c_k$ のを変数とする連立方程式に等しい．

$$\begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \ldots \mathbb{a}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = 0$$

これは

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = 0$$

ともかける．ここでこの連立方程式の解の一つは $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ であることに注意しよう．よって，ベクトル $\mathbb{a}_i \ldots, \mathbb{a}_k$ の線型独立性の問題というのは上の連立一次方程式の解の自由度が 0 か否かという問題に等しいのである．

さて，もしも A の階数が k だとすると，変数の個数は k 個なので，解の自由度は 0 となる．つまりこの方程式の解は一意的であるから，$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ でなければならない．

逆にこの方程式の解が $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ しかないとすると，解の自由度は 0 ということになり，連立方程式の変数の個数と階数が等しいことがわかる．その値は k である．

以上で証明が終わる．□

例その１

$\mathbb{R}^3$ の二つのベクトル $\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ について，これらが線型独立かどうか判定しよう．

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とおき，この行列の階数を求めると良い．以下のようにして簡約行列に変形する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，階数が 2 であることがわかり，上の定理からこれらのベクトル $\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_2$ が線形独立であることがわかった．

例その２

$\mathbb{R}^3$ の二つのベクトル $\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ について，これらが線型独立かどうか判定しよう．

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおき，この行列の階数を求めると良い．以下のように簡約行列に変形する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よってこの行列の階数は 1 であり，ベクトル $\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_2$ は線形従属であることがわかる．ちなみに線形従属であるということは全てが 0 というわけではない係数 c_1 と c_2 が存在して $c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 = \mathbb{0}$ となるということである．このような c_1 と c_2 はどのように求めれば良いだろうか？それは連立一次方程式

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbb{0}$$

を解けば良い．係数拡大行列 $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{0} \end{array}\right]$ に付随する簡約行列は上と同様の行基本変形の計算で

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

となることがわかる．この連立方程式の解の集合は $c_2 = q$ とおくことによって

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2q \\ q \end{bmatrix} \middle| q \text{ は実数} \right\}$$

であることがわかる．実際この集合から例えば $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ というものをとってくるとこの c_1 と c_2 について

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 = (-6)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}$$

となることが計算によって確かめられる．

13.3　成分表示

上では $\mathbb{b} = \mathbb{0}$ のときについて，これがベクトル $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ の線形結合でどのように表されるか？という容態に応じて線形独立と線形従属という概念があるということを学んだ．そしてそれは連立一次方程式に関係があるのである．それでは $\mathbb{b}$ が $\mathbb{0}$ とは限らない場合についてはどうだろうか？

行列 A とベクトル $\mathbb{b}$ について $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ という連立一次方程式の解が存在するか否かは係数拡大行列 $\left[\, A \,\middle|\, \mathbb{b} \,\right]$ の階数と A の階数が等しいことが必要十分条件であった．そのことを踏まえると以下の定理がわかる．

定理 33. $\mathbb{R}^n$ のなかの k 個のベクトル $\mathbb{a}_1 \ldots, \mathbb{a}_k$ について，$c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_k\mathbb{a}_k = \mathbb{b}$ となる実数 $c_1, \ldots, c_k$ が存在するための必要十分条件は

$$A$$

の階数と

$$\left[\, A \,\middle|\, \mathbb{b} \,\right]$$

の階数が等しくなることである．

さらに，考えているベクトルの個数 k と空間の次元 n が等しいという場合には次の定理が知られている．

定理 34. n 次元線形空間 $\mathbb{R}^n$ の中の n 個のベクトル $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ が線型独立であるとする．このときどんなベクトル $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ についても，n 個の実数 $c_1, \ldots, c_n$ が存在して

$$c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{b}$$

が満たされる．さらにこのような $c_1, \ldots, c_n$ は一意的に定まる．

証明．この定理は実は連立一次方程式で理解することができる．実際

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \cdots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}$$

とおき，

$$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

とおくと，

$$c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{b}$$

という式は

$$A\mathbb{c} = \mathbb{b}$$

という連立一次方程式になる．今 $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ が線型独立であることがわかっているので A は可逆だから $\mathbb{c} = A^{-1}\mathbb{b}$ となることがわかる．一意性もわかる．□

このc は何だろうか？これは，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ から作られる**斜交座標系**におけるベクトル $\mathbb{b}$ の座標を表している．本当は抽象的なベクトル空間の話をした方がわかりやすいのかもしれない．この件に関しては一旦ここで筆をおくことにする．

重要注意 35. この回を踏まえると，連立一次方程式

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}, \left(A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \ldots & \mathbb{a}_k \end{bmatrix}\right)$$

の解の存在あるいは非存在とはベクトル $\mathbb{b}$ がベクトルたち $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ の線形結合でかけるか？という問題と同じであり，上の連立一次方程式の解とは，$\mathbb{b}$ を $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ の線形結合で書いたときの係数は何かという問題と同じなのである．表にすると大体以下のような感じ．

線形的現象 $\xleftrightarrow{\text{同じ (と思うことにする)}}$ 線形写像 $\xleftrightarrow{\text{だいたい同じ}}$ 行列 $\xleftrightarrow{\text{まあまあ同じ}}$ 連立一次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$
$\xleftrightarrow{\text{同じ}}$ **ベクトル $\mathbb{b}$ は $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_k$ の線形結合で書けるか？書ける場合にその係数は何か？**

第14回　線形写像と行列

この回は抽象的な線形代数と行列論との対応の核心的部分であり，難しい．テスト範囲にはしない．しかしながら線形代数を理解するための助けにはなるのかもしれない．

14.1　線形写像

この回では線形写像と行列の対応関係を見ていく．

以下の定理に出てくる「写像」という言葉は,「関数」のかっこいい言い方だと思えば良い．

定義 36. n と m を 1 以上の整数とする．このとき写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは次の二つの条件を満たすときにいう．

1. 任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ と $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ について $f(r \cdot \mathbb{a}) = r \cdot f(\mathbb{a})$ が成り立つ．

2. 任意の $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ について $f(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = f(\mathbb{a}) + f(\mathbb{b})$ が成り立つ．

行列から作られる線形写像

定義 37. A を (n, m) 型の行列とする．このとき $F_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を，$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ の行き先 $F_A(\mathbb{a})$ を

$$F_A(\mathbb{a}) = A\mathbb{a}$$

と定めることで定義する．

命題 38. 上で定めた写像 $F_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線形写像である．

証明. 行列の積とスカラー倍が交換することと，行列の積と和の分配法則から結果は従う．詳細は以下のようになる．

まずスカラー倍について考える．$F_A(r\cdot\mathbb{a}) = A(r\cdot\mathbb{a})$ なので，行列の積とスカラー倍が交換できることから $A(r\cdot\mathbb{a}) = r\cdot(A\mathbb{a})$ と変形できる．$F_A(\mathbb{a}) = A\mathbb{a}$ なので $F_A(r\cdot\mathbb{a}) = r\cdot F_A(\mathbb{a})$ である．

次に和について考える，行列の積の分配法則を踏まえると次の計算ができる．

$$F_A(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = A(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = A\mathbb{a} + A\mathbb{b} = F_A(\mathbb{a}) + F_A(\mathbb{b}).$$

よって，$F_A(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = F_A(\mathbb{a}) + F_A(\mathbb{b})$ である．以上で F_A が線形写像であることがわかったので証明が終わる．　□

定義 39. n を 1 以上の整数とする．このとき，$\mathbb{e}_i$ という記号で，成分が n 個あるタテベクトルで，その成分は第 i 成分が 1 でそれ以外は 0 とする．このとき $\langle \mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \ldots, \mathbb{e}_n \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ **の標準基底**と呼ぶ．本当は n にも依存したような記号にした方が良いのだが，大抵の場合 n はあらかじめわかっているので，わざわざ書かない．

以下のような命題がある．

命題 40. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線型写像とし，$\mathbb{e}_i \in \mathbb{R}^n$ の行き先 $f(\mathbb{e}_i)$ は $\mathbb{a}_i \in \mathbb{R}^m$ であるとする．このとき，行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \ldots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix}$$

と定義すると，線形写像 f は

$$f(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$$

と表示できる．

証明．任意の $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ をとる．そして

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と成分表示をする．ここで標準基底 $\mathbb{e}_i$ の定義を鑑みると，

$$\mathbb{x} = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n$$

と表示できる．これを f で飛ばしてみよう．線形性から次のことがわかる．

$$\begin{aligned} f(\mathbb{x}) &= f(x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n) \\ &= f(x_1\mathbb{e}_1) + f(x_2\mathbb{e}_2) + \cdots + f(x_n\mathbb{e}_n) = x_1 f(\mathbb{e}_1) + x_2 f(\mathbb{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbb{e}_n) \\ &= x_1\mathbb{a}_1 + x_2\mathbb{a}_2 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{a}_1 & \mathbb{a}_2 & \ldots & \mathbb{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\mathbb{x} \end{aligned}$$

となる．よって命題がわかる．　□

定義 41. 以上で述べられている行列 A を f **の表現行列**と呼ぶ．今からは行列 A に対応する線形写像を F_A と書くことにする．

行列の積に関して以下の定理がある．これは行列の積が，線形写像の合成に対応しているという定理である．つまり，行列の積というのは，

命題 42. $F_A \circ F_B$ の表現行列は AB である．つまり $F_A \circ F_B = F_{AB}$ である．

第15回　期末テスト

この回は期末テストの予定である．テストに関する情報は伏す.

第16回　参考文献にある書籍の簡単な紹介

参考文献にある本を購入する必要はなく，そしてまた，この参考文献以外にも線形代数の本はあり，自分に合う教科書を見繕うと良いかと思われる．この文書の参考文献にある本はただ単にこの文書を書くにあたり参考にしたという以上の意味はない．

このセクションでは参考文献にある本の簡単な説明をする．

筆者は [1] の著者である海老原先生の，この本を教科書とした線形代数の講義を受けている (@埼玉大学)．講義の内容は細かく思い出せないが，とにかく筆者にとっては線形代数の本といったらコレである．

電子書籍 [2] は階段行列を用いた線形代数の教科書である．購入する場合には Kindle で買える．

書籍 [3] は線形代数を簡単に説明した教科書として有名である．

[4] は経済学部向けの数学の教科書である．線形代数に関する部分では産業関連表などを扱っているようだ．

書籍 [5] は経済学部向けの，大学院へ入学することを見据えた人に向けて書かれた本のようだ．固有値を用いた差分方程式の漸近的な挙動の解析を行なっており，固有値の理論の応用を知ることができるだろう．

書籍 [6] は文系向けとは銘打っているものの，その中身は線形代数のとても面白い応用がかなりたくさん紹介されており，理系の人にとってもたいへん興味深いものに映ると思われる．

書籍 [7] は私が大学院にいた頃に指導教員からいただいた線形代数の教科書である．簡約行列の話も載っているし，網羅的に線形代数の内容が記述されているかと思われる．

ノート [8] は神奈川大学の嶺幸太郎さんが公開している線形代数の講義ノートである．この講義における，簡約階段行列を用いるという方針はこの講義ノートを見て決定した．

書籍 [9] はかなり最近出版された線形代数の本である．付録には行列を行変形によって簡約階段行列にすることができること，そしてその一意性が証明されている．続巻が楽しみな本でもある．

書籍 [10] は伝統的な線形代数の教科書であり，おそらく今現役の数学者は線形代数に関してはこの本にお世話になったことが多少なりともあるかと思われる．しかしながら 1966 年出版なので少し古いような感じがある (沖縄の「本土返還」が 1972 年なのでそれよりも古いということで古さを考えてみてほしい)．

関連図書

[1] 海老原円. 線形代数. テキスト理系の数学 3. 数学書房, 第 1 版, 2010.

[2] 小屋良祐. 階段行列で理解する線型代数入門. Amazon Kindle, 第 1 版, 2018.

[3] 石村園子. やさしく学べる線形代数. 共立出版, 第 1 版, 2000.

[4] 竹之内脩. 経済・経営系　数学概説　第二版. 新経済学ライブラリ＝別巻９. 新世社, 第 2 版, 2009.

[5] 中村勝之. 新装版 大学院へのマクロ経済学講義. 現代数学社, 第 1 版, 2021.

[6] 田村三郎. 文系のための線形代数の応用. 現代数学社, 第 1 版, 2004.

[7] 木村達雄, 竹内光弘, 宮本雅彦, 森田純. 明解 線形代数. 日本評論社, 第 1 版, 2005.

[8] 嶺幸太郎. 線形代数学講義ノート, 2022. 2024 年 3 月 6 日閲覧, http://www.math.kanagawa-u.ac.jp/mine/linear_alg/index.html.

[9] 渕野昌. 自己隔離期間の線型代数 I. 出版社「1 月と 7 月」, 第 1 版, 2023.

[10] 齋藤正彦. 線型代数入門. 基礎数学 1. 東京大学出版会, 第 1 版, 1966.