

グロモフ・ハウスドルフ距離の分岐測地線

伊敷 喜斗 (理研光量子制御技術開発チーム)*

この発表では論文 [5] で得られた定理を紹介する. 記号 $\mathcal{M}$ でコンパクト距離空間の等長類の集合を表し, $\mathcal{GH}$ でグロモフ・ハウスドルフ距離を表す. 距離空間 $(M, \mathcal{GH})$ をグロモフ・ハウスドルフ空間と呼ぶことにする. 記号 $\mathbf{Q}$ でヒルベルト立方体 $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ を表すことにする. 論文 [3] で筆者は離散空間ではない距離化可能空間上の距離関数の空間の中で二倍性質と一様不連結性を満たさないような距離関数の分布を決定した. 論文 [4] ではコンパクト距離化可能空間上の距離関数の空間の中で二倍性質, 一様不連結性, そして一様完全性を満たすかもしくは満たさないような距離関数の分布を決定した. これら三つの性質は David–Semmes の定理 [1] に現れる性質である. この発表ではまず最初に上で述べた結果の発展として, グロモフ・ハウスドルフ空間の中でのこれら三つの性質の位相的分布を述べる. 次にグロモフ・ハウスドルフ空間の中の, ヒルベルト立方体で連続的にパラメーター付けされた分岐測地線であって, 上で挙げた三つの性質のいくつかを満たす空間の集合を通るかもしくは避けるようなもの, そして次元が無限大になる空間の集合を通るものを構成する. この構成法によって, $\mathcal{M}$ にはヒルベルト立方体が埋め込めることがわかる. これらの結果の応用として, 上で挙げた集合が測地空間になり, 無限大の位相次元を持つことがわかる.

記号 $\mathcal{D}$, $\mathcal{UD}$, そして $\mathcal{UP}$ でそれぞれ $\mathcal{M}$ の中の二倍性質, 一様不連結性, そして一様完全性を満たす空間の集合を表すことにする. 位相空間の部分集合が疎であるとはその閉包の内部が空であるときにいい, 部分集合が**第一類集合**であるとは可算個の疎な集合の和集合で表されるときに言う.

定理 1 ([5]). 集合 $\mathcal{D}$, $\mathcal{UD}$, $\mathcal{UP}$ は $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ の中で稠密 F_σ で第一類集合である.

距離空間 (X, d) と距離空間に関する性質 $\mathcal{P}$ に対して (X, d) が性質 $\mathcal{P}$ を満たすならば $T_{\mathcal{P}}(X, d) = 1$ とし, そうでなければ $T_{\mathcal{P}}(X, d) = 0$ と定義する.

定理 2 ([5]). $(u, v, w) \in \{0, 1, 2\}^3$ とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) もし $\{u, v, w\} \setminus \{2\} = \{1\}$ ならば $\mathcal{X}(u, v, w)$ は稠密 F_σ である.
- (2) もし $\{u, v, w\} \setminus \{2\} = \{0\}$ ならば $\mathcal{X}(u, v, w)$ は稠密 G_δ である.
- (3) もし $\{u, v, w\} \setminus \{2\} = \{0, 1\}$ ならば $\mathcal{X}(u, v, w)$ は稠密であり $F_{\sigma\delta}$ で $G_{\delta\sigma}$ である.

距離空間 (X, d) に対して写像 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ が $x, y \in X$ を結ぶ**測地線**であるとは $\gamma(0) = x$ で $\gamma(1) = y$ であり任意の $s, t \in [0, 1]$ について $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|d(x, y)$ が成り立つときにいう.

定義 1 ([5]). A を $[0, 1]$ の閉集合とし, $(X, d), (Y, e) \in \mathcal{M}$ とする. このとき連続写像 $F : [0, 1] \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{M}$ が (X, d) から (Y, e) への **A -分岐測地束**であるとは以下の条件が満たされるときにいう.

- (1) 任意の $q \in \mathbf{Q}$ について $F(0, q) = (X, d)$ と $F(1, q) = (Y, e)$ を満たす.
- (2) 任意の $s \in A$ と任意の $q, r \in \mathbf{Q}$ について $F(s, q) = F(s, r)$ である.
- (3) 任意の $q \in \mathbf{Q}$ について $F_q(s) = F(s, q)$ によって定義される写像 $F_q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ は測地線である.

* e-mail: yoshito.ishiki@riken.jp

(4) 任意の $(s, q), (t, r) \in ([0, 1] \setminus A) \times \mathbf{Q}$ についてもしも $(s, q) \neq (t, r)$ ならば $F(s, q) \neq F(t, r)$ である.

定理 3 ([5]). $(u, v, w) \in \{0, 1, 2\}^3$ とし, $(X, d), (Y, e) \in \mathcal{X}(u, v, w)$ とする. さらに A を $[0, 1]$ の閉部分集合とする. このとき, (X, d) から (Y, e) への A -分岐測地束 $F : [0, 1] \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{X}(u, v, w)$ が存在する.

定理 3 の証明では筆者の論文 [2] で得られた totally exotic type を持つ Cantor 空間の存在が重要な役割を果たしている. 無限次元距離空間のなす空間について考察した.

写像 $\mathcal{D} : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ が次元関数であるとは以下の二つの条件を満たすときにいう.

- (1) 任意の $(X, d) \in \mathcal{M}$ と任意の X の閉集合 A に対して $\mathcal{D}(A, d) \leq \mathcal{D}(X, d)$ を満たす.
- (2) 任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ に対してコンパクト距離空間 (Y, e) が存在して $\mathcal{D}(Y, e) = \infty$ と $\delta_\epsilon(Y) \leq \epsilon$ を満たす.

例えば位相次元, Hausdorff 次元, 上箱次元, 下箱次元, パッキング次元, Assouad 次元は次元関数である. 次元関数 $\mathcal{D}$ に対して $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ によって $\mathcal{D}(X, d) = \infty$ となる $(X, d) \in \mathcal{M}$ 全体の集合を表すことにする. 次元関数の定義より $\mathcal{J}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ である. 定理 3 の証明を応用することにより以下の定理を得る.

定理 4 ([5]). $\mathcal{D}$ を次元関数とし, $(X, d), (Y, e) \in \mathcal{J}(\mathcal{D})$ とする. このとき, (X, d) から (Y, e) への A -分岐測地束 $F : [0, 1] \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{J}(\mathcal{D})$ が存在する.

空間 $\mathbf{Q}$ が連続体濃度を持つことと, 定理 3, 4 から次の定理 5, 6, 7 がわかる.

定理 5 ([5]). $\mathcal{S}$ を $\mathcal{X}(u, v, w)$ かもしくは $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ とする. このとき任意の $(X, d), (Y, e) \in \mathcal{S}$ について $\mathcal{S}$ 内を通る (X, d) から (Y, e) への測地線がちょうど連続体濃度個存在する.

定理 6 ([5]). $\mathcal{S}$ を $\mathcal{X}(u, v, w)$ かもしくは $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ とする. このとき任意の $(X, d), (Y, e) \in \mathcal{S}$ について $\mathbf{Q}$ から $\mathcal{S}$ への位相的埋め込みであって, その像が (X, d) と (Y, e) を含んでいるものが存在する. 特に $\mathcal{S}$ は無限大の位相次元を持つ.

定理 7 ([5]). $\mathcal{S}$ を $\mathcal{X}(u, v, w)$ かもしくは $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ とし, O を $\mathcal{M}$ の空でない開集合とする. このとき $\mathcal{S} \cap O$ は無限大の位相次元を持つ.

任意の可分距離空間は $\mathbf{Q}$ に位相的に埋め込めるので定理 6 から次がわかる.

定理 8 ([5]). $\mathcal{S}$ を $\mathcal{X}(u, v, w)$ かもしくは $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ とする. このとき任意の可分距離空間は $\mathcal{S}$ に位相的に埋め込むことができる.

一方で任意の可分距離空間が $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ に等長に埋め込めるかは未解明であり, 有限距離空間ならばそれができていることが知られているのみである.

参考文献

- [1] G. David and S. Semmes, *Fractured fractals and broken dreams: Self similar geometry through metric and measure*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 7, Oxford University Press, 1997.
- [2] Y. Ishiki, *Quasi-symmetric invariant properties of Cantor metric spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 69 (6) (2019), 2681–2721.
- [3] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, 2020, arXiv:2003.13277.
- [4] Y. Ishiki, *On dense subsets in spaces of metrics*, 2021, arXiv:2104.12450, to appear in Colloq. Math.
- [5] Y. Ishiki, *Branching geodesics of the Gromov–Hausdorff distance*, 2021, arXiv:2108.06970.