

グロモフ・ハウスドルフ空間の中の連結空間

伊敷 喜斗 (理研光量子制御技術開発チーム)*

この発表では筆者の論文 [4] で得られた結果を発表する。

記号 $\mathcal{M}$ でコンパクト距離空間のすべての等長類のクラスを表し, $\mathcal{GH}$ でグロモフ・ハウスドルフ距離を表す. このとき $\mathcal{GH}$ は $\mathcal{M}$ 上の距離関数となる. 距離空間 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ は**グロモフ・ハウスドルフ空間**と呼ばれる.

筆者の論文 [2] では, グロモフ・ハウスドルフ空間内の, ヒルベルト立方体によって連続的に係数付けされた連続体濃度個の分岐測地線のうち以下を満たすものを構成した. (1) 二倍性質, 一様完全性, 一様不連結性のうちいくつかを満たすコンパクト距離空間全体の集合を通るかもしくは避けるようなもの. (2) 無限次元なコンパクト距離空間全体の集合を通るもの. (3) カントール集合と同相なコンパクト距離空間全体の集合を通るもの. この分岐測地線の構成から, 上で挙げたグロモフ・ハウスドルフ空間の部分集合は無限大の位相次元を持つことがわかる.

筆者の論文 [3] では, 単体からグロモフ・ハウスドルフ空間への位相的埋め込みを構成することによって, 指定された位相次元, Hausdorff 次元, パッキング次元, 上箱次元, Assouad 次元をもつコンパクト距離空間の全体の集合とコンパクト超距離空間全体の集合が弧状連結で, 無限大の位相次元を持つことを証明した.

この文書で紹介する筆者の論文 [4] では, 上で述べた論文 [2] と [3] に関連する研究として, グロモフ・ハウスドルフ空間の中の連結な距離空間全体, 弧状連結な空間全体, 測地空間全体, そして $\text{CAT}(0)$ 空間全体の集合が弧状連結で無限大の位相次元を持つことを証明した. また, 固有な $\text{CAT}(0)$ 空間全体の集合が点付きグロモフ・ハウスドルフ距離に関して無限大の位相次元を持つことも示した. 以下で詳細な主張を述べる.

まず, $\text{CAT}(0)$ 空間を定義しよう. 測地空間 (X, d) が $\text{CAT}(0)$ であるとは任意の X 内の測地三角形 $\triangle$ と $x, y \in \triangle$ について $d(x, y) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{y})$ が成り立つときにいう. ここで $d_{\mathbb{R}^2}$ は二次元のユークリッド距離であり, $\bar{x}$ と $\bar{y}$ は, $\triangle$ に対応する $\mathbb{R}^2$ 内の比較三角形 $\bar{\triangle}$ 内の x と y に対応する点である. 空間が $\text{CAT}(0)$ であるということは, 空間が局所的には曲率が非負であるとみなせるということである.

記号 $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{G}$, そして $\mathcal{Z}$ でそれぞれ連結, 弧状連結, 測地的, そして $\text{CAT}(0)$ であるような $\mathcal{M}$ の部分集合とする.

まず最初にコンパクト距離空間 H を任意に与え, さらに H 内の $n+1$ 個の点と上で定義した $\mathcal{M}$ の部分集合の $n+1$ 個の点を与えた時に, この最初に与えた $n+1$ 個の点の対応の拡張になっているような位相的埋め込みの存在を証明した.

定理 1. 整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ をとる. コンパクト距離化可能空間 H をとり, そして $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を H のなかの $n+1$ 個の異なる点とする. 集合 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{G}$, そして $\mathcal{Z}$ のうちのどれかひとつとする. 集合 $\mathcal{S}$ 中の点 $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は異なる i, j について $\mathcal{GH}((X_i, d_i), (X_j, d_j)) > 0$ を満たすものとする. このとき位相的埋め込み $\Phi: H \rightarrow \mathcal{S}$ が存在して $\Phi(v_i) = (X_i, d_i)$ を満たす.

系 2. 集合 $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{G}$, そして $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{M}$ のなかで弧状連結であり, これらの空集合ではない開集合は全て無限次元である.

* e-mail: yoshito.ishiki@riken.jp

今から上で述べた定理と系を点付きグロモフ・ハウスドルフ空間へと一般化する．距離空間が**固有**であるとはその空間の任意の有界閉集合がコンパクトであるときに言う．また**点付き距離空間**とは，距離空間 (X, d) とその距離空間の中の一点 $a \in X$ との組 (X, d, a) のことをいう．点付き距離空間 $(X, d, a), (Y, e, b)$ の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が**点付き等長写像**であるとは f が等長写像で $f(a) = b$ を満たすときにいう．

記号 $\mathcal{PM}$ で点付き固有距離空間の等長類全体を表す．この集合 $\mathcal{PM}$ の上には**点付きグロモフ・ハウスドルフ収束**と呼ばれる収束が定義されるが，以下ではこの収束と同じ位相を生成する距離を定義していこう．

距離空間 (X, d) を与える．任意の $x \in X$ と $r \in (0, \infty)$ に対して $B_d(x, r)$ で x を中心とする半径 r の閉球とする．また， X の部分集合 A に対して $N_d(A, r)$ で以下の条件を満たす $x \in X$ の全体を表す：ある $a \in A$ が存在して $d(x, a) < r$ を満たす． (X, d, a) と (Y, e, b) を点付き距離空間とする．このとき $X \sqcup Y$ 上の距離 h が $(t; a, b)$ -admissible であるとは $h|_{X^2} = d$ と $h|_{Y^2} = e$ と $h(a, b) < t$ と $B_h(a, t^{-1}) \subset N_h(Y, t)$ そして $B_h(b, t^{-1}) \subset N_h(X, t)$ を満たすときにいう．今から量 $\widehat{\mathcal{GH}}*((X, d, a), (Y, e, b))$ を以下の条件を満たす t の下限として定義する： $(t; a, b)$ -admissible な距離 h が $X \sqcup Y$ 上に存在する．そして $\mathcal{GH}*((X, d, a), (Y, e, b))$ を

$$\mathcal{GH}*((X, d, a), (Y, e, b)) = \min \left\{ \widehat{\mathcal{GH}}*((X, d, a), (Y, e, b)), \frac{1}{2} \right\}.$$

と定義する．このとき $\mathcal{GH}^*$ は $\mathcal{PM}$ 上の距離関数となる ([1, Corollary 3.14] を参照のこと)．この距離 $\mathcal{GH}^*$ を**点付きグロモフ・ハウスドルフ距離**と呼ぶ．

記号 $\mathcal{PZ}$ で $\mathcal{PM}$ に属する CAT(0) 空間全体の集合を表す．

定理 3. 整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ をとる．コンパクト距離化可能空間 H をとり，そして $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を H のなかの $n+1$ 個の異なる点とする．集合 $\mathcal{PZ}$ の中の点 $\{(X_i, d_i, a_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は異なる i, j について $\mathcal{GH}((X_i, d_i, a_i), (X_j, d_j, a_j)) > 0$ を満たすものとする．このとき位相的埋め込み $\Phi: H \rightarrow \mathcal{PZ}$ が存在して $\Phi(v_i) = (X_i, d_i, a_i)$ を満たす．

系 4. 集合 $\mathcal{PZ}$ は $\mathcal{PM}$ のなかで弧状連結であり，集合 $\mathcal{PZ}$ の空集合ではない開集合は全て無限次元である．

定理 1 と 3 の証明において重要なのは直積距離の構成法である．上記の定理の位相的埋め込みは，族 $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ の直積の上の ℓ^2 型の直積距離を少し修正し，単射性を担保するような距離木を生やしたものとして構成される．論文 [3] においても定理 1 と 3 と同様の定理を証明したが，そこでの位相的埋め込みの構成は，指定された次元を破壊しないように直和距離を用いて構成されたことを強調しておく．

参考文献

- [1] D. A. Herron, *Gromov–Hausdorff distance for pointed metric spaces*, J. Anal. 24 (2016), no. 1, 1–38.
- [2] Y. Ishiki, *Branching geodesics of the Gromov–Hausdorff distance*, Anal. Geom. Metr. Spaces, 10 (2022), 109–128.
- [3] Y. Ishiki, *Fractal dimensions and topological embeddings of simplexes into the Gromov–Hausdorff space*, 2021, arXiv:2110.01881.
- [4] Y. Ishiki, *Continua in the Gromov–Hausdorff space*, Topology Appl. 312 (2022), 108058.