

距離関数の空間の稠密部分集合について

伊敷 喜斗 (理研光量子制御技術開発チーム)*

距離化可能空間 X に対して, 記号 $M(X)$ で X 上の距離関数で, X と同じ位相を生成するもの全体を表すことにする. 二つの距離 $d, e \in M(X)$ に対して, ∞ の値も許した距離 $\mathcal{D}_X(d, e) = \sup_{x, y \in X} |d(x, y) - e(x, y)|$ を導入することにより, $M(X)$ にも距離空間の構造が入る. 以下では $M(X)$ には $\mathcal{D}_X$ によって生成される位相が備わっていると考える. Niemytzki と Tychonoff [7] は 1928 年に距離化可能空間 X がコンパクトであることと, $M(X)$ の元がすべて完備距離であることは同値である. 筆者はこの定理の超距離空間版を [5] で証明しており, Dovgoshey と Shcherbak [2] も超距離化可能空間に対して全有界性を用いたコンパクト性の特徴付けを証明している. このような距離化可能空間の性質を土台の空間の位相的性質を結びつける定理を発展させたものを [6] で複数証明したのでここに紹介する. 本稿でただ単に 0 次元もしくは有限次元と言ったら被覆次元がそれぞれ 0 次元, 有限次元という意味である. まず Lipschitz 関数に関する MacShane–Whitney の拡張定理を用いて, 有限次元性に関する以下の定理を証明した.

定理 1 ([6]). X を有限次元コンパクト距離化可能空間とする. 記号 Q で $d \in M(X)$ であって (X, d) が ℓ^∞ ノルムを備えた有限次元ユークリッド空間に等長埋め込みできるもの全体の集合を表すことにする. このとき Q は $(M(X), \mathcal{D}_X)$ の中で稠密である.

以下に述べるものが有限次元性, 0 次元性をそれぞれ二倍性質, 一様不連結性で特徴付けた定理である. 定理 2 の証明には定理 1 を用いる.

定理 2 ([6]). 距離化可能空間 X が有限次元でコンパクトであることと, 二倍性質を満たす距離関数の集合が $M(X)$ のなかで稠密 F_σ であることは同値である.

定理 3 ([6]). 距離化可能空間 X が 0 次元でコンパクトであることと一様不連結な距離関数の集合が $M(X)$ のなかで稠密 F_σ であることは同値である.

集合 X 上の距離関数 $d : X^2 \rightarrow [0, \infty)$ が**超距離関数**, もしくは**非アルキメデスの距離関数**であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対して**強三角不等式**と呼ばれる以下の不等式 $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$ を満たすときにいう. ここで, $\vee$ は $\mathbb{R}$ における $\max$ 演算子とする. 集合 S が**値集合**であるとは $S \subset [0, \infty)$ と $0 \in S$ を満たすときにいう. 距離関数 d が S -**値**であるとは $d(X^2) \subset S$ を満たすときにいう. 集合 X と X 上の S -値超距離関数の対 (X, d) を S -**値超距離空間**と呼ぶ. 位相空間 X に対して $UM(X, S)$ で, X と同じ位相を生成する X 上の S -値超距離関数全体を表すことにする. $d, e \in UM(X, S)$ に対して, $UD_X^S(d, e)$ を, 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \leq e(x, y) \vee \epsilon$ と $e(x, y) \leq d(x, y) \vee \epsilon$ を満たす $\epsilon \in [0, \infty]$ の下限として定義する. このとき $UD_X^S : UM(X, S)^2 \rightarrow [0, \infty]$ は $CL(S) \cup \{\infty\}$ に値をとる超距離関数となる. 超距離関数の空間は論文 [5] で導入された.

値集合 S が可算共始数を持つとは S 内の 0 でない点列で 0 に収束するものが存在するときにいう. 定理 2 の超距離版として以下を証明した.

定理 4 ([6]). S を可算共始数を持つ値集合とする. X を超距離化可能空間とする. このとき X がコンパクトであることと二倍性質を満たす距離関数の集合が $UM(X, S)$ のなかで稠密 F_σ であることは同値である.

* e-mail: yoshito.ishiki@riken.jp

David と Semmes はコンパクト距離空間が二倍性質、一様不連結性、一様完全性の三つの性質を満たすならばその空間は標準的なカントール集合に擬対称同型であることを証明した。二倍性質と一様不連結性は [4] で定義された伝播性質の例になっており、上で述べた定理の証明では一部 [4] の議論を用いている。

一方で、一様完全性は伝播性質ではなく、[4] の理論を流用できないが、その位相分布について調査した。以下では Γ でカントール集合を表す。

定理 5 ([6]). 以下の主張が成り立つ。

- (1) 一様完全な距離関数の集合は $M(\Gamma)$ のなかで稠密 F_σ である。
- (2) 一様完全でない距離関数の集合は $M(\Gamma)$ のなかで稠密 G_δ である。

値集合 S が**指数的**であるとは、 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ と $a \in (0, 1)$ と $M \in (1, \infty)$ が存在して $M^{-1}a^n \leq s_n \leq Ma^n$ が成り立つことである。定理 5 の超距離版として以下を証明した。

定理 6 ([6]). S を値集合とする。このときこのとき以下が成り立つ。

- (1) S が指数的であることと、一様完全な距離関数の集合が $UM(\Gamma, S)$ のなかで稠密 F_σ であることは同値である。
- (2) 一様完全でない距離関数の全体は $UM(X, S)$ のなかで稠密 G_δ である。

距離空間 (X, d) と距離空間に関する性質 $\mathcal{P}$ に対して (X, d) が性質 $\mathcal{P}$ を満たすならば $T_{\mathcal{P}}(X, d) = 1$ とし、そうでなければ $T_{\mathcal{P}}(X, d) = 0$ と定義する。そして任意の $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$ について

$$E(u, v, w) = \{d \in M(\Gamma) \mid T_D(\Gamma, d) = u, T_{UD}(\Gamma, d) = v, T_{UP}(\Gamma, d) = w\}.$$

と定義する。論文 [3] では David–Semmes の定理の仮定を満たさない距離の擬対称同型類の濃度を決定した。論文 [6] ではそのような距離の集合の位相的分布を決定した。

定理 7 ([6]). 以下の三つの主張が成り立つ。

- (1) 集合 $E(1, 1, 1)$ は $M(\Gamma)$ のなかで稠密 F_σ である。
- (2) 集合 $E(0, 0, 0)$ は $M(\Gamma)$ のなかで稠密 G_δ である。
- (3) $(1, 1, 1)$ と $(0, 0, 0)$ と異なる任意の $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$ に対して集合 $E(u, v, w)$ は $M(\Gamma)$ のなかで稠密で、さらに $G_{\delta\sigma}$ でありなおかつ $F_{\sigma\delta}$ である。

参考文献

- [1] G. David and S. Semmes, *Fractured fractals and broken dreams: Self similar geometry through metric and measure*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 7, Oxford University Press, 1997.
- [2] O. Dovgoshey and V. Shcherbak, *The range of ultrametrics, compactness, and separability*, preprint, 2021, arXiv:2102.10901v2.
- [3] Y. Ishiki, *Quasi-symmetric invariant properties of Cantor metric spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 69 (6) (2019), 2681–2721.
- [4] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, 2020, arXiv:2003.13277.
- [5] Y. Ishiki, *An embedding, an extension, and an interpolation of ultrametrics*, 2020, arXiv:2008.10209.
- [6] Y. Ishiki, *On dense subsets in spaces of metrics*, 2021, arXiv:2104.12450.
- [7] V. Niemytzki and A. Tychonoff, *Beweis des Satzes, dass ein metrisierbarer Raum dann und nur dann kompakt ist, wenn er in jeder Metrik vollständig ist*, Fund. Math. 12 (1928), 118–120.