

距離関数の等長な拡張作用素

伊敷 喜斗 (東京都立大学理学部数理科学科)*

この発表では、筆者のプレプリント [4] で得られた結果を紹介する。距離化可能空間 Z について $\text{Met}(Z)$ で Z の距離関数で Z と同じ位相を生成するもの全体を表すとする。そして $\text{CPM}(Z)$ は連続な写像 $d: Z \times Z \rightarrow [0, \infty)$ であって、擬距離であるもの全体を表すとする。 $\text{BMet}(Z)$ で有界な関数 $d \in \text{Met}(Z)$ を表す。そして $\text{Comp}(Z)$ で完備距離関数 $d \in \text{Met}(X)$ を表すとする。これらの記号のもとで、 $\text{BMet}(Z)$ と $\text{Comp}(Z)$ は $\text{Met}(Z)$ の部分集合であり、 $\text{Met}(Z)$ は $\text{CPM}(Z)$ の部分集合である。そして、 $\text{CPM}(Z)$ および $\text{Met}(Z)$ に上限距離 $\mathcal{D}_Z$ を $\mathcal{D}_Z(d, e) = \sup_{x, y \in Z} |d(x, y) - e(x, y)|$ と定義する。これは $\text{CPM}(Z)$ と $\text{Met}(Z)$ の両方の上に定義されるが同じ記号で表すことにする。筆者によって $\text{CPM}(Z)$ の中で $\text{Met}(Z)$ は稠密 (実際には comeager) であることが証明されている ([3])。以上の空間のうち、空間 $(\text{Met}(Z), \mathcal{D}_Z)$ は Z 上に展開可能な「幾何学」全体のモジュライ空間とみなすことができる。筆者は、今まで距離関数に関する特定の性質 $\mathcal{P}$ について、この空間 $\text{Met}(Z)$ の部分集合 $\{d \in \text{Met}(Z) \mid (Z, d) \text{ は性質 } \mathcal{P} \text{ を持つ}\}$ の稠密性や、ボレル階層を明らかにしてきた。例えば、 Z に特定の条件を課すことで、自己等長群が自明であるような距離関数が $\text{Met}(Z)$ の中で comeager であることを証明した。この種の結果により Z 上にどのような幾何学が展開できるのかや、普段用いている幾何学的要請の強さを $\text{Met}(Z)$ を介して窺い知ることができるようになる。

これらの $\text{Met}(Z)$ の研究の礎になるのは、Felix Hausdorff による次の距離関数の拡張定理である： X を距離化可能空間とし、 A をその閉集合とする。このとき任意の $d \in \text{Met}(A)$ についてある $D \in \text{Met}(X)$ が存在して $D|_{A \times A} = d$ を満たす。今回の研究ではこのハウスドルフの結果をさらに拡張することを志向した。つまり、本研究では閉集合 A 上の距離関数のモジュライ空間 $\text{Met}(A)$ の元を同時に $\text{Met}(X)$ の元へと拡張できるような作用素で、しかも上限距離に関して等長であるものを構成した：

定理 1 (I., [4, Theorem 1.1]). X を距離化可能空間とし、 A をその閉集合とする。このとき写像

$$E: \text{Met}(A) \rightarrow \text{Met}(X)$$

であって以下を満たすものが存在する。

- (1) 任意の $d \in \text{Met}(A)$ に対して $E(d)|_{A^2} = d$ が成り立つ；
- (2) E は等長埋め込みである。つまり、任意の $d, e \in \text{Met}(A)$ は以下を満たす：

$$\mathcal{D}_A(d, e) = \mathcal{D}_X(E(d), E(e));$$

- (3) E は距離関数の有界性を保つ。つまり $E(\text{BMet}(A)) \subseteq \text{BMet}(X)$ が成り立つ；
- (4) E は距離関数の完備性を保つ。つまり $E(\text{Comp}(A)) \subseteq \text{Comp}(X)$ が成り立つ。

さらにこの写像から擬距離関数の拡張作用素 $\tilde{E}: \text{CPM}(A) \rightarrow \text{CPM}(X)$ を得ることでできて、 $\tilde{E}|_{\text{Met}(A)} = E$ を満たす。この状況で $\tilde{E}(\text{Met}(A)) = \tilde{E}(\text{CPM}(A)) \cap \text{Met}(X)$ が成り立つ。よって像集合 $E(\text{Met}(A))$ は $\text{Met}(X)$ の中で閉集合である。

本研究は科研費 (課題番号:JP24KJ0182) の助成を受けたものである。

* e-mail: ishiki-yoshito@tmu.ac.jp

この定理の先行研究としては Bessaga [2], Banach [1], Pikhurko [7], そして Zarichnyi [8] たちの結果があり、有界距離関数全体に対しては、上限距離に関して等長であるような距離関数の (線形な) 同時拡張作用素 $\text{BMet}(A) \rightarrow \text{BMet}(X)$ の存在が知られていた。筆者の研究は非有界距離関数に対しても適応できる距離関数の同時拡張作用素で上限距離に関して等長なものを構成したので、彼らの研究の延長線上に位置している。

今回の論文では、筆者が「浸透的構成」と名付けた、距離化可能関数 X の拡張空間を得る手法を用いた。定理 1 の証明において、それに該当する三つの構成を証明の中で用いている。一つ目は距離空間 (S, u) をパラメータとして含む X の ℓ^1 直積 $X \times_{\ell^1} S$ である。今回の論文では X の Whitney–Dugundji decomposition から定まる距離空間を (S, u) として選んだ。そして二つ目は 1-Wasserstein space $W_1(X)$ である。今回の研究の過程において、1-Wasserstein space $W_1(X)$ の収束の必要十分条件を与える Partmanteau 型の特徴付けを、 X に可分性も完備性も仮定しない一般的な状況で証明した。三つ目はポーランド空間 Q とその上のボレル確率測度 λ を与えた時にボレル可測写像 $f: Q \rightarrow X$ の全体に、通常の L^1 距離と同様の方法での、 λ を用いた積分による距離関数を与えた空間の拡張である。この空間には、元の空間 X は定数関数として埋め込まれる。

以上の定理 1 と、越野克久氏の論文 [6] を元に以下のような予想を筆者は立てた。

予想 1. 濃度が最小の非可算濃度 $\aleph_1$ であるような離散空間 $D_{\aleph_1}$ について、その上の距離関数の空間 $\text{Met}(D_{\aleph_1})$ は完備距離化可能ではない。

筆者がこの予想が正しいと思う根拠は二つある。まず第一に、空間 $D_{\aleph_1}$ から $\text{Met}(D_{\aleph_1})$ が $\text{CPM}(D_{\aleph_1})$ の G_δ 集合 (可算個の開集合の共通部分) であることを証明できる可算的な情報を取り出せないであろうことがある。第二に、この予想が正しい場合、定理 1 から一般に距離可能空間 X について $\text{Met}(X)$ が完備距離化可能であれば X の可分性が従うというとても興味深い現象が観察されるからである。この場合、 $\text{Met}(X)$ の (絶対) ボレル階層を研究する際には自動的に X の可分性が導かれることが期待される。

本研究の応用として、 $\text{Met}(X)$ の等長的普遍性の理論の確立がある。筆者は神奈川大学の越野克久氏と共同研究を行い、今回の主定理を応用して、 X に特定の条件を与えたときに、距離空間のある程度のクラス $\mathcal{C}$ に対して、任意の $(S, u) \in \mathcal{C}$ が $\text{Met}(X)$ に等長に埋め込めることを証明した。等長普遍性に関する詳細は、我々のプレプリント [5] や、もしくは越野克久氏のアブストラクトや一般講演を参照されたい。

参考文献

- [1] T. Banach, *AE(0)-spaces and regular operators extending (averaging) pseudo-metrics*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 42 (1994), no. 3, 197-206.
- [2] C. Bessaga, *On linear operators and functors extending pseudometrics*, Fund. Math. 142 (1993), no. 2, 101-122, DOI:10.4064/fm-142-2-101-122.
- [3] Y. Ishiki, *Spaces of metrics are Baire*, 2024, preprint, arXiv:2402.04565.
- [4] Y. Ishiki, *An isometric extensor of metrics*, 2024, preprint, arXiv:2407.03030.
- [5] Y. Ishiki and K. Koshino, *On Isometric universality of spaces of metrics*, preprint, 2024.
- [6] K. Koshino, *On the Borel complexity and the complete metrizability of spaces of metrics*, (2024), preprint, arXiv:2403.07421.
- [7] O. Pikhurko, *Extending metrics in compact pairs*, Mat. Stud. 3 (1994), 103- 106, 122.
- [8] M. Zarichnyi, *Regular linear operators extending metrics: a short proof*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 44 (1996), no. 3, 267-270.