

フラクタル次元とヒルベルト立方体のグロモフ・ハウスドルフ空間への位相的埋め込み

伊敷 喜斗 (理研光量子制御技術開発チーム)*

この発表では筆者の論文 [4] で得られた結果を発表する. この発表では主に位相次元 $\dim_T X$, Hausdorff 次元 $\dim_H(X, d)$, パッキング次元 $\dim_P(X, d)$, 上箱次元 $\overline{\dim}_B(X, d)$, Assouad 次元 $\dim_A(X, d)$ を取り扱う. 任意の有界距離空間 (X, d) について以下の基本的な不等式が成り立つことに注意しよう.

$$\dim_T X \leq \dim_H(X, d) \leq \dim_P(X, d) \leq \overline{\dim}_B(X, d) \leq \dim_A(X, d).$$

位相空間が **Cantor 空間** であるとはそれが Cantor 集合に同相であるときにいう. 集合 X 上の距離関数 $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ が **超距離関数** であるとは強三角不等式 $d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$ を満たすときにいう. ここで $\vee$ は $\mathbb{R}$ 上の最大値関数を表す.

論文 [1] では任意の $a, b \in [0, \infty]$ で $a \leq b$ を満たすものについて Cantor 距離空間 (X, d) で $\dim_H(X, d) = a$ と $\dim_A(X, d) = b$ を満たすものが存在することを示した. この結果の発展として, 上で述べた五つの次元についての指定次元問題を解いた.

記号 $\mathcal{L}$ で $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in [0, \infty]^4$ であって $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ を満たすもの全体を表すことにする. また $\mathcal{R}$ で $(l, a_1, a_2, a_3, a_4) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}) \times [0, \infty]^4$ であって $l \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ を満たすもの全体を表すとする.

定理 1. 任意の $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{L}$ について Cantor 超距離空間 (X, d) が存在して次を満たす. $\dim_H(X, d) = a_1, \dim_P(X, d) = a_2, \overline{\dim}_B(X, d) = a_3, \dim_A(X, d) = a_4$.

定理 2. 任意の $(l, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{R}$ について距離空間 (X, d) が存在して以下を満たす.

$$\begin{aligned} \dim_T X &= l, \dim_H(X, d) = a_1, \dim_P(X, d) = a_2, \overline{\dim}_B(X, d) = a_3, \\ \dim_A(X, d) &= a_4. \end{aligned}$$

記号 $\mathcal{M}$ でコンパクト距離空間の等長類の集合を表し, $\mathcal{GH}$ でグロモフ・ハウスドルフ距離を表す. 距離空間 $(M, \mathcal{GH})$ をグロモフ・ハウスドルフ空間と呼ぶ.

任意の $(l, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{R}$ に対して $\mathcal{D}(l, a_1, a_2, a_3, a_4)$ を $(X, d) \in \mathcal{M}$ であって

$$\begin{aligned} \dim_T X &= l, \dim_H(X, d) = a_1, \dim_P(X, d) = a_2, \overline{\dim}_B(X, d) = a_3, \\ \dim_A(X, d) &= a_4. \end{aligned}$$

を満たすもの全体とする. 定理 2 から $\mathcal{D}(l, a_1, a_2, a_3, a_4) \neq \emptyset$ であることがわかる. また, $\mathcal{U}$ で $\mathcal{M}$ のなかの超距離空間全体を表すとする.

論文 [3] において筆者は二倍性質, 一様不連結性, 一様完全性という三つの性質を満たすか満たさないかに着目して, 各 $(u, v, w) \in \{0, 1, 2\}^3$ に対して $\mathcal{M}$ の部分集合 $\mathcal{X}(u, v, w)$ を定義し, この集合の2点を結ぶ $\mathcal{X}(u, v, w)$ 内の測地線がちょうど連続体濃度あることを証明した. この測地線の族の構成から $\mathcal{X}(u, v, w)$ にヒルベルト立方体 $\mathbf{Q} = \prod_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} [0, 1]$ が位相的に埋め込めることをがわかり, 系として $\mathcal{X}(u, v, w)$ の位相次元が無有限大であることがわかる. この結果の関連研究として論文 [4] では $\mathcal{D}(l, a_1, a_2, a_3, a_4)$ と $\mathcal{U}$ の弧状連結性と無有限次元性を証明した.

* e-mail: yoshito.ishiki@riken.jp

定理 3. 集合 $\mathcal{S}$ はある $(l, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{R}$ について $\mathcal{S} = \mathcal{D}(l, a_1, a_2, a_3, a_4)$ であるか
 もしくは $\mathcal{S} = \mathcal{U}$ であるとする．そして $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ を $\mathcal{S}$ 内の列で異なる
 i, j について $\mathcal{GH}((X_i, d_i), (X_j, d_j)) > 0$ を満たすものとする．ヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ 内の
 $n+1$ 個の点 $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を任意にとる．このとき位相的埋め込み $\Phi: \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{S}$ であって任意
 の $i \in \{1, \dots, n+1\}$ について $\Phi(v_i) = (X_i, d_i)$ であるものが存在する．

定理 3 からすぐに次の二つの系を得る．

系 4. 任意の $(l, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{R}$ について $\mathcal{D}(l, a_1, a_2, a_3, a_4)$ は弧状連結であり，位相
 次元が無限大である．

系 5. 集合 $\mathcal{U}$ は弧状連結であり，位相次元が無限大である．

注意 1. 空間 $(\mathcal{U}, \mathcal{GH})$ が測地空間であることは Mémoli-Smith-Wan [5] によって既に証
 明されている．

グロモフ・ハウスドルフ距離 $\mathcal{GH}$ の非アルキメデス版として非アルキメデス的グロ
 モフ・ハウスドルフ距離 $\mathcal{NA}$ が $\mathcal{U}$ 上に定義される．この $\mathcal{NA}$ は $\mathcal{U}$ 上の超距離になる．
 このことと，系 5 を組み合わせることで以下を得る．

系 6. $I_{\mathcal{U}}: (\mathcal{U}, \mathcal{GH}) \rightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{NA})$ を恒等写像とする．このとき， $I_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{GH}$ と $\mathcal{NA}$ によっ
 て誘導される位相について不連続である．

系 6 から直ちに $\mathcal{GH}$ と $\mathcal{NA}$ の比が非有界になるという Qiu [7] の以下の定理の別証明
 を得ることができる．Qiu は具体的に空間を構成することで証明を行なったが，筆者の
 証明は $(\mathcal{U}, \mathcal{GH})$ の弧状連結性を用いるものであり，Qiu のものとは異なる．

系 7. 任意の $c \in [2, \infty)$ に対して $(X, d), (Y, e) \in \mathcal{U}$ が存在し，以下が成り立つ．

$$c \cdot \mathcal{GH}((X, d), (Y, e)) < \mathcal{NA}((X, d), (Y, e)).$$

参考文献

- [1] Y. Ishiki, *Quasi-symmetric invariant properties of Cantor metric spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 69 (6) (2019), 2681–2721.
- [2] Y. Ishiki, *On dense subsets in spaces of metrics*, 2021, arXiv:2104.12450, to appear in Colloq. Math.
- [3] Y. Ishiki, *Branching geodesics of the Gromov–Hausdorff distance*, 2021, arXiv:2108.06970.
- [4] Y. Ishiki, *Fractal dimensions and topological embeddings of simplexes into the Gromov–Hausdorff space*, 2021, arXiv:2110.01881.
- [5] F. Mémoli, Z. Smith, and Z. Wan, *Gromov–Hausdorff distance on p -metric spaces and ultrametric spaces*, 2019, arXiv:1912.00564.
- [6] L. Mišík and T. Žáček, *On some properties of the metric dimension*, Comment. Math. Univ. Carol. 31(4) (1990), 781–791.
- [7] D. Qiu, *Geometry of non-Archimedean Gromov–Hausdorff distance*, p -Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 1 (4) (2009), 317–337.