

距離関数の空間はベールである

伊敷 喜斗 (東京都立大学理学部数理科学科)*

この発表では筆者のプレプリント [2] で得られた結果を紹介する. 位相空間 M の部分集合 S が **comeager** であるとは稠密開集合の可算族 $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} G_i \subseteq S$ となることである. そして位相空間 M が**ベール空間**であるとは M の任意の comeager な部分集合が M のなかで稠密であるときにいう. この comeager という概念は測度論における「零集合の補集合」の位相的な類似であり, ベール空間とはその comeager 集合がうまく機能する空間のことである. 特に完備距離化可能空間はベールである.

筆者は今まで, 距離化可能空間 X に対して X 上の距離関数全体の空間 $\text{Met}(X)$ に上限距離 $\mathcal{D}_X$ を備えた空間 $(\text{Met}(X), \mathcal{D}_X)$ を研究してきた. この空間の位相は一様収束の位相である. この空間 $(\text{Met}(X), \mathcal{D}_X)$ は X 上の距離関数全体のワイルドなモジュライ空間とみなすことができ, この空間の位相的構造はどのような幾何学が X 上に展開可能であるのかという情報を反映している. 特に, 筆者は距離空間に関する性質 $\mathcal{P}$ について集合 $\{d \in \text{Met}(X) \mid (X, d) \text{ は性質 } \mathcal{P}\}$ が $\text{Met}(X)$ のなかで稠密であるかどうか, comeager であるかどうかを研究してきた. 例えば, (X, d) の Assouad 次元というフラクタルな次元が ∞ であるような d 全体は $\text{Met}(X)$ のなかで comeager であることを証明した ([1]). このような comeager 集合が $\text{Met}(X)$ のなかでうまく機能するために, $\text{Met}(X)$ はベールであることが望ましい. そのための X に関する十分条件が部分的に知られていた. はじめに筆者は, X が第二可算な局所コンパクトハウスドルフ空間であれば $\text{Met}(X)$ が完備距離化可能であることを示した ([1, Lemma 5.1]). 次いで越野克久氏は [3, Proposition 3] において, より強い結果として, X が σ コンパクトかつ距離化可能という仮定だけで $\text{Met}(X)$ が完備距離化可能であることを証明した. 完備距離化可能であればベールなので, これらは $\text{Met}(X)$ のベール性に関する定理でもある. 今回は主定理の一つとして, 最も一般的に, X が距離化可能であれば $\text{Met}(X)$ がベールであることを証明した. この結果を契機として, 距離関数のモジュライ空間というワイルドな空間を対象とした理論の発展, あるいは誕生を期待したい.

補助的に $\text{CPM}(X)$ で X 上の連続な擬距離関数全体を表し, 上限距離 $\mathcal{D}_X$ を備えていると考える. 空間 $(\text{Met}(X), \mathcal{D}_X)$ は $(\text{CPM}(X), \mathcal{D}_X)$ の部分空間でありさらに稠密である. 今回の研究の核心は, X の開被覆から誘導される $\text{CPM}(X)$ の特別な開集合を見出したところにある. 位相空間 X とその開被覆 $\mathcal{C}$ に対して記号 $L(\mathcal{C})$ で $d \in \text{CPM}(X)$ であって, d が $\mathcal{C}$ に対する正のルベーク数を持つもの全体の集合を表す. つまり $d \in L(\mathcal{C})$ であることと, ある $r \in (0, \infty)$ が存在して $\{U(x, r; d)\}_{x \in X}$ が $\mathcal{C}$ を細分することは同値である. ここで $U(x, r; d)$ は開球である. まず最初に筆者は以下の定理を証明した.

定理 1. X をパラコンパクトハウスドルフ空間とし, $\mathcal{C}$ を X の開被覆とする. このとき集合 $L(\mathcal{C})$ は $\text{CPM}(X)$ の稠密開集合である.

この定理を基本として, $\text{CPM}(X)$ の comeager な部分集合をいくつか生成した. 距離関数 $w \in \text{CPM}(X)$ に対して $I(w)$ という記号で $d \in \text{CPM}(X)$ であって, 恒等写像 $1_X: (X, d) \rightarrow (X, w)$ が一様連続になるもの全体の集合を表す. このとき以下の定理を証明した. この定理は [3, Proposition 3] の証明と類似点があり興味深い.

* e-mail: ishiki-yoshito@tmu.ac.jp

定理 2. X を距離化可能空間とし, $w \in \text{CPM}(X)$ を固定する. このとき $I(w)$ は $\text{CPM}(X)$ のなかで *comeager* である.

この定理2の応用として, タイトルで述べられている定理を証明した.

定理 3. X を距離化可能空間とする. 空間 $(\text{CPM}(X), \mathcal{D}_X)$ の部分集合 $\text{Met}(X)$ は *comeager* である. 特に距離空間 $(\text{Met}(X), \mathcal{D}_X)$ はベールである.

さらに応用として, X が完備距離化可能空間である場合には $\text{Met}(X)$ の要素は (位相的な意味で) ほとんど全て完備距離であるということを証明した.

定理 4. X は完備距離化可能空間とする. このとき $\text{Comp}(X)$ は $\text{CPM}(X)$ のなかで *comeager* である. よって $\text{Comp}(X)$ は $\text{Met}(X)$ のなかでも *comeager* である.

また筆者は上で述べた四つの定理の非アルキメデスの類似も証明した. 記号の詳細な説明は省略するが, おおよそ非アルキメデスの類似を得るためには数学的概念に「ウルトラ」や「非アルキメデスの」をつけると大まかにはうまくいく.

定理 5. R を値域集合, X をウルトラパラコンパクトハウスドルフ空間とし, $\mathcal{C}$ を X の開被覆とする. このとき集合 $\text{UL}(\mathcal{C}; R)$ は $(\text{UCPM}(X, R), \mathcal{UD}_X^R)$ の稠密開集合である.

定理 6. R を値域集合で X を距離化可能空間とし, $w \in \text{CPM}(X)$ を固定する. このとき $\text{UI}(w, R)$ は $\text{UCPM}(X, R)$ のなかで *comeager* である.

定理 7. R を値域集合, X を距離化可能空間とする. このとき $(\text{UCPM}(X, R), \mathcal{UD}_X^R)$ の部分集合 $\text{UMet}(X; R)$ は *comeager* である. 特に $(\text{UMet}(X; R), \mathcal{UD}_X^R)$ はベールである.

定理 8. R を値域集合とし, X は完備距離化可能空間とする. このとき $\text{UComp}(X; R)$ は $\text{UCPM}(X, R)$ のなかで *comeager* である. よって $\text{UComp}(X; R)$ は $\text{UMet}(X; R)$ のなかでも *comeager* である.

本研究と, 冒頭で述べた筆者の先行研究, そして同じく冒頭で述べた越野氏の先行研究から「 X が σ コンパクトであることと $\text{Met}(X)$ が完備距離化可能であることが同値である」という自然な予想が現れる ([2] のプレプリント第一版を参照のこと). プレプリント [4] において, 越野氏は, X と $\text{Met}(X)$ の絶対ボレル階層の相補的な対応関係を証明し, その系として, 上で述べた予想を肯定的に解決した. 完備距離化可能と絶対 G_δ は距離化可能空間の上では同値であることに注意されたい. これらのことにまつわる以下の問題を提示することで文章の締めにする.

問題 1. 距離化可能空間 X について $\text{Met}(X)$ は $\text{CPM}(X)$ のなかで常にボレル集合であるか? それが成り立つ場合, $\text{Met}(X)$ のボレル階層は何であるか?

参考文献

- [1] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, (2020), preprint, arXiv:2003.13277.
- [2] Y. Ishiki, *Spaces of metrics are Baire*, 2024, preprint, arXiv:2402.04565.
- [3] K. Koshino, *Recognizing the topologies of spaces of metrics with the topology of uniform convergence*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 70 (2022), no. 2, 165–171, DOI:10.4064/ba220523-18-4.
- [4] K. Koshino, *On the Borel complexity and the complete metrizability of spaces of metrics*, (2024), preprint, arXiv:2403.07421.