

距離関数の空間の中の強リジッド距離関数

伊敷 喜斗 (理研光量子制御技術開発チーム)*

この発表では筆者の論文 [3] で得られた結果を発表する。

自己等長群が自明になるようなリーマン計量(つまりリジッドなリーマン計量)について次のことが知られている ([1, 5]などを参照のこと)。

定理 A. コンパクトな可微分多様体 M 上の (擬)リーマン計量全体の空間の中でリジッドな (擬)リーマン計量および全体の集合はホイットニーの C^∞ 位相において稠密で、なおかつ開集合である。

筆者はこの定理 A の 0次元空間版と見做せる定理を証明した。以下に詳細を説明する。

以下では距離可能空間 X が 0次元と言った場合には、 X の交わらない二つの閉集合 A と B について開かつ閉な X の部分集合 V が存在して $A \subset V$ かつ $B \cap V = \emptyset$ であることを意味する。この定義は X の大きい帰納次元が 0 であることと同値であり、いま距離化可能空間しか考えていないので被覆次元が 0 であるということとも同値である。

X を距離化可能空間とする。このとき記号 $\text{Met}(X)$ で X と同じ位相を生成する X の上の距離関数全体の集合を表すとする。そして $\text{Met}(X)$ 上には上限距離 $\mathcal{D}_X$ が導入されているとする。つまり $\mathcal{D}_X(d, e) = \sup_{x, y \in X} |d(x, y) - e(x, y)|$ と定義されている。この距離 $\mathcal{D}_X$ は ∞ の値も取りうるが、このような距離でも ϵ 開球によって通常距離関数と同じように位相を導入することができる。筆者はこの距離関数全体の空間 $(\text{Met}(X), \mathcal{D}_X)$ について、幾何学的性質 P を与えたとき P を満たす距離関数の集合がこの中で稠密であるかどうか、またどのようなボレル階層を持つかなどを調べてきた。今回は距離関数のある種の剛性に注目し研究を行った。記号 $\text{LI}(X)$ で以下の条件を満たす $d \in \text{Met}(X)$ 全体を表す：もし $x, y, u, v \in X$ が $x \neq y, u \neq v$, そして $\{x, y\} \neq \{u, v\}$ を満たすならば、二つの正の実数 $d(x, y)$ と $d(u, v)$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である。筆者の論文 [3] においてまず最初に次の定理 1 を証明した。この定理 1 を証明するために [3] では $\mathbb{Q}$ 上線型独立な連続体濃度の実数を生成するためのシステムを導入して、ある種の無理数論を展開している。以下では記号 $\mathfrak{c}$ は連続体濃度を表すとする。

定理 1. X を 0次元距離化可能空間で $\text{Card}(X) \leq \mathfrak{c}$ を満たすとする。また $\epsilon \in (0, \infty)$ で $d \in \text{Met}(X)$ とする。このとき $e \in \text{LI}(S)$ が存在して $\mathcal{D}_X(d, e) \leq \epsilon$ が成り立つ。つまり $\text{LI}(X)$ は $(\text{Met}(X), \mathcal{D}_X)$ の中で稠密である。さらに、もしも X が完備距離化可能ならば、上の e を完備であるように取ることができる。

集合 X 上の距離関数 d が強リジッドであるとは任意の $x, y, u, v \in X$ について $d(x, y) = d(u, v)$ かつ $d(x, y) \neq 0$ ならば $\{x, y\} = \{u, v\}$ を満たすときにいう。記号 $\text{SR}(X)$ で $\text{Met}(X)$ に属する距離関数で強リジッドなもの全体を表すとする。強リジッドという概念は 1972 年に [4] において導入された。ところで距離関数 (X, d) がリジッドであるとは (X, d) の非自明な自己等長写像が存在しないときにいう。もし (X, d) が強リジッドであるならば (X, d) はリジッドであることを注意する。一般に距離化可能空間 X について $\text{SR}(X) \neq \emptyset$, つまり X が強リジッドな距離を許容することと X が 0次元でなおかつ $\text{Card}(X) \leq \mathfrak{c}$ を満たすことは同値である ([3, Corollary 4.22]などを参照のこと)。

* e-mail: yoshito.ishiki@riken.jp

位相空間 X の部分集合が G_δ であるとはその集合が可算個の開集合の共通部分で表されるときにいう。これはボレル階層という位相空間の部分集合の分類の一つである。位相空間 X の部分集合 S が **comeager** であるとは、 S が稠密な G_δ 集合を含んでいるときにいう。このような集合はしばしば **generic** と呼ばれる。ベール空間、特に関数空間などの空間の中での comeager な部分集合は伝統的に調べられてきており、特異な集合が空間の中に大きな位相的分布を持っていることが知られている。例えば、関数空間 $C([0, 1], \mathbb{R})$ の中の至る所微分不可能な関数全体が、 $C([0, 1], \mathbb{R})$ の中で comeager であることが知られている。一般にベール空間の comeager な部分集合は第二類集合にもなる。そして X が距離化可能で σ コンパクトかつ局所コンパクトならば $\text{Met}(X)$ はベール空間になることが知られている ([2, Lemma 5.1] を参照のこと)。

Janos の論文 [4] などではカントール集合の上に強リジッドな距離関数が存在することなどが証明されているが、そのような先行研究の発展として、強リジッド距離が稠密に存在することを述べる以下の定理 2 を証明した。定理 2 における稠密性の部分は本質的に定理 1 に負っている。また以下の定理 2 は強リジッドなコンパクト距離空間全体が、グロモフ・ハウスドルフ空間 (コンパクト距離空間全体のモジュライ空間) の中で generic であることを述べた Rouyer の定理 ([6, Theorem 2.1]) の類似と見なせる。

定理 2. X を 0 次元距離化可能空間で $\text{Card}(X) \leq \mathfrak{c}$ を満たすとする。このとき $\text{SR}(X)$ は $\text{Met}(X)$ の中で稠密である。さらに、もしも X が σ コンパクトであるならば、 $\text{SR}(X)$ は G_δ でもある。特に $\text{SR}(X)$ は *comeager* である。

定理 2 の系として以下の二つの定理を得る。特に定理 3 はこの文書の最初にあげたリジッドなリーマン計量に関する定理 A の 0 次元版と考えることができる。また定理 3 の仮定において X に局所コンパクト性を貸していないことにも注意されたい。記号 $R(X)$ で $\text{Met}(X)$ に属するリジッドな距離全体を表すとする。

定理 3. X を 0 次元距離化可能空間とする。もしも X が σ コンパクトで $3 \leq \text{Card}(X) \leq \mathfrak{c}$ を満たすならば集合 $R(X)$ は $(\text{Met}(X), D_X)$ の中で *comeager* である。

定理 4. X を第二可算な 0 次元局所コンパクトハウスドルフ空間とする。このとき $d \in \text{Met}(X)$ が存在して任意の $\xi \in X$ について $F_\xi(x) = d(x, \xi)$ と定義される写像 $F_\xi: X \rightarrow \mathbb{R}$ は位相的埋め込みになる。

参考文献

- [1] D. G. Ebin, *The manifold of Riemannian metrics*, In Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968), pages 11–40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [2] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, 2020, arXiv 2003.13277.
- [3] Y. Ishiki, *Strongly rigid metrics in spaces of metrics*, to appear in Topology Proceedings, 63 (2024), 125–148, available at arXiv: 2210.02170.
- [4] L. Janos, *A metric characterization of zero-dimensional spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 31 (1972), 268–270.
- [5] P. Mounoud, *Metrics without isometries are generic*, Monatsh. Math., 176 (4) (2015), 603–606.
- [6] J. Rouyer, *Generic properties of compact metric spaces*, Topology Appl., 158 (16) (2011), 2140–2147.