

グロモフ・ハウスドルフ空間の中の木

伊敷 喜斗 (理研光量子制御技術開発チーム)*

この発表では筆者の論文 [3] で得られた結果を発表する。

記号 $\mathcal{M}$ でコンパクト距離空間のすべての等長類のクラスを表し, $\mathcal{GH}$ でグロモフ・ハウスドルフ距離を表す. このとき $\mathcal{GH}$ は $\mathcal{M}$ 上の距離関数となる. 距離空間 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ は**グロモフ・ハウスドルフ空間**と呼ばれる.

筆者の論文 [1] では, グロモフ・ハウスドルフ空間内の, ヒルベルト立方体によって連続的に係数付けされた連続体濃度個の分岐測地線のうち以下を満たすものを構成した. (1) 二倍性質, 一様完全性, 一様不連結性のうちいくつかを満たすコンパクト距離空間全体の集合を通るかもしくは避けるようなもの. (2) 無限次元なコンパクト距離空間全体の集合を通るもの. (3) カントール集合と同相なコンパクト距離空間全体の集合を通るもの. この分岐測地線の構成から, 上で挙げたグロモフ・ハウスドルフ空間の部分集合は無限大の位相次元を持つことがわかる.

筆者の論文 [2] では, 単体からグロモフ・ハウスドルフ空間への位相的埋め込みを構成することによって, 指定された位相次元, Hausdorff 次元, パッキング次元, 上箱次元, Assouad 次元をもつコンパクト距離空間の全体の集合とコンパクト超距離空間全体の集合が弧状連結で, 無限大の位相次元を持つことを証明した.

筆者の論文 [3] では, 上で述べた論文 [1] と [2] に関連する研究として, グロモフ・ハウスドルフ空間の中の連結な距離空間全体, 弧状連結な空間全体, 測地空間全体, そして $\text{CAT}(0)$ 空間全体の集合が弧状連結で無限大の位相次元を持つことを証明した. また, 固有な $\text{CAT}(0)$ 空間全体の集合が点付きグロモフ・ハウスドルフ距離に関して無限大の位相次元を持つことも示した.

この文章で紹介する論文 [4] において, 筆者は, グロモフ・ハウスドルフ空間の中の距離木のなす部分集合が無限次元であることと, 弧状連結であることを証明した. 以下で詳細な定理を述べる.

今から距離木を定義する. この文章では測地線とはある閉区間から距離空間への等長埋め込みが存在してその等長埋め込みの像となっているものを指す. この距離木についてはいろいろ同値な特徴付けが知られているが, ここでは測地線を用いた定義を紹介する. 距離空間 (X, d) が**距離木**, もしくは $\mathbb{R}$ -**木**であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ と x, y を結ぶ測地線 G_1 と y, z を結ぶ測地線 G_2 について, もしも $G_1 \cap G_2 = \{y\}$ であるならば $G_1 \cup G_2$ が x と z を結ぶ測地線になるときにいう.

記号 $\mathcal{T}$ で $\mathcal{M}$ の中の距離木全体の集合を表すことにする.

定理 1. 整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ をとる. コンパクト距離化可能空間 H をとり, そして $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を H のなかの $n+1$ 個の異なる点とする. 集合 $\mathcal{T}$ の中の点 $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は異なる i, j について $\mathcal{GH}((X_i, d_i), (X_j, d_j)) > 0$ を満たすものとする. このとき位相的埋め込み $\Phi: H \rightarrow \mathcal{T}$ が存在して $\Phi(v_i) = (X_i, d_i)$ を満たす.

系 2. 集合 $\mathcal{T}$ は $\mathcal{M}$ のなかで弧状連結であり, これらの空集合ではない開集合は全て無限次元である.

* e-mail: yoshito.ishiki@riken.jp

記号 $\mathcal{PM}$ で点付きグロモフ・ハウスドルフ空間を表し, $\mathcal{GH}_*$ を $\mathcal{PM}$ 上の点付きグロモフ・ハウスドルフ距離とする. 記号 $\mathcal{PT}$ で $\mathcal{PM}$ に属する距離木全体の集合を表す.

定理 3. 整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ をとる. コンパクト距離化可能空間 H をとり, そして $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を H のなかの $n+1$ 個の異なる点とする. 集合 $\mathcal{PT}$ 中の点 $\{(X_i, d_i, a_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は異なる i, j について $\mathcal{GH}((X_i, d_i, a_i), (X_j, d_j, a_j)) > 0$ を満たすものとする. このとき位相的埋め込み $\Phi: H \rightarrow \mathcal{PT}$ が存在して $\Phi(v_i) = (X_i, d_i, a_i)$ を満たす.

系 4. 集合 $\mathcal{PT}$ は $\mathcal{PM}$ のなかで弧状連結であり, 集合 $\mathcal{PT}$ の空集合ではない開集合は全て無限次元である.

論文 [2] と [3] では定理 1 と同様の埋め込み定理を証明し, 論文 [3] では定理 3 と同様に点付きグロモフ・ハウスドルフ空間への位相的埋め込みを構成した.

論文 [2] では指定された次元を破壊しないように直和距離空間と単射性を担保するような距離を持つ可算離散空間の一点コンパクト化と同相なコンパクト距離空間を用いて位相的埋め込みを構成した.

論文 [3] では連結性や $\text{CAT}(0)$ 性を壊さないように ℓ^2 型の直積距離空間に単射性を担保するような距離木を生やす方法を用いて位相的埋め込みを構成した.

今回の論文 [4] では距離木 $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ からそれぞれ一点を指定し, それら一点で交わるようなウェッジ和に距離を入れる方法で位相的埋め込みを構成した. また埋め込みの単射性を担保するために論文 [3] で用いた特定の距離木を今回も用いた.

参考文献

- [1] Y. Ishiki, *Branching geodesics of the Gromov–Hausdorff distance*, Anal. Geom. Metr. Spaces, 10 (2022), 109–128.
- [2] Y. Ishiki, *Fractal dimensions and topological embeddings of simplexes into the Gromov–Hausdorff space*, 2021, arXiv:2110.01881.
- [3] Y. Ishiki, *Continua in the Gromov–Hausdorff space*, Topology Appl. 312 (2022), 108058.
- [4] Y. Ishiki, *Metric trees in the Gromov–Hausdorff space*, arXiv:2112.05345, to appear in Comment. Math. Univ. Carol.