

カントール距離空間の擬対称不変性質

伊敷 喜斗 (筑波大数理物質)*

距離空間の擬対称性の概念は、測度距離空間上の幾何解析 (例えば [2, 5] を参照) や共形次元論 (例えば [4] を参照) など様々な分野において、重要な応用を提供している. 同相写像 $\eta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ に対して、距離空間の間の同相写像 $f: X \rightarrow Y$ が η -擬対称であるとは、任意の $t \in [0, \infty)$ と任意の $x, y, z \in X$ に対して $d_X(x, y) \leq td_X(x, z)$ であるならば $d_Y(f(x), f(y)) \leq \eta(t)d_Y(f(x), f(z))$ を満たすときに言う. ここで、 d_X は X の距離を表し、 d_Y は Y の距離を表す. 距離空間の間の同相写像が、ある η について η -擬対称であるとき、単に擬対称であると言う. 二つの距離空間の間に擬対称写像が存在するときにそれらの距離空間は擬対称同値であると言う. 擬対称写像の逆写像も擬対称であり、二つの擬対称写像の合成は擬対称である. よって擬対称同値性は距離空間の間の同値関係になっている.

本稿では次の三つの擬対称不変性質に注目する. すなわち、二倍性質、一様不連続性、そして一様完全性である. David と Semmes は [1] において、コンパクト距離空間 (X, d) が二倍性質、一様不連続性、一様完全性の三つすべてを満たすならば、 (X, d) は三進カントール集合と擬対称同値であるという一意化定理を示した. 一般に、三進カントール集合と同相な距離空間をカントール距離空間という. 筆者は [3] において、三進カントール集合と擬対称同値ではないカントール距離空間は存在するのか、また存在するのであれば、どの程度に豊富に存在するのか、という一意化定理を補完する研究成果を得た.

研究成果を述べる前に記号の準備をする. 距離空間 (X, d) が性質 P を満たすときに $T_P(X, d) = 1$ と表し、そうでない場合 $T_P(X, d) = 0$ とする. つまり $T_P(X, d)$ は (X, d) が性質 P を満たすかどうかの真理値を表している. 三つ組 $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$ に対して、距離空間 (X, d) が (u, v, w) 型であるとは、

$$T_D(X, d) = u, \quad T_{UD}(X, d) = v, \quad T_{UP}(X, d) = w$$

を満たすときに言う. ここで、 D は二倍性質、 UD は一様不連続性、 UP は一様完全性を表す. カントール距離空間がスタンダードであるとは、それが $(1, 1, 1)$ 型を持つときに言い、そうでないときエキゾチックと言う. 三進カントール集合はスタンダードである.

距離空間 (X, d) の擬対称同値類を $\mathcal{G}(X, d)$ で表し、距離空間 (X, d) の共形ゲージと呼ぶ. 距離空間に対する共形ゲージは、共形次元論における基本概念である. 三つ組 $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$ に対して、共形ゲージからなるクラス $\mathcal{M}(u, v, w)$ を

$$\mathcal{M}(u, v, w) = \{ \mathcal{G}(X, d) \mid (X, d) \text{ は } (u, v, w) \text{ 型のカントール距離空間である} \}$$

で定める. 先に述べた David-Semmes の一意化定理 ([1]) によれば、 $\mathcal{M}(1, 1, 1)$ は一元集合である. このこととは対照的に、主な研究成果として、次の定理を証明した.

定理 1 ([3]). $(1, 1, 1)$ ではないすべての $(u, v, w) \in \{0, 1\}^3$ に対して、

$$\text{card}(\mathcal{M}(u, v, w)) = 2^{\aleph_0}$$

が成り立つ. ここで card は濃度を表す.

日本学術振興会特別研究員 (DC1)

* e-mail: ishiki@math.tsukuba.ac.jp

定理1は, David-Semmesの一意化定理([1])を補完しており, スタンダードなコントロール空間が特別であることを主張する. すなわち, $(1, 1, 1)$ 型以外の各型については, スタンダードな場合とは異なり, 各型について擬対称同値でないコントロール距離空間が連続体濃度個存在する.

距離空間に関する性質 P と距離空間 (X, d) に対して, その任意の近傍が性質 P を満たさないような X の点全体を $S_P(X, d)$ で表す. 一般に, 距離空間の性質 P が擬対称不変であるとは, 二つの距離空間 (X, d) と (Y, e) が擬対称同値で, (X, d) が性質 P を満たすならば (Y, e) も性質 P を満たすときに言う. もしも P が擬対称不変性質であるならば, S_P は擬対称不変になっている. つまり, (X, d) と (Y, e) が擬対称同値ならば $S_P(X, d)$ と $S_P(Y, e)$ もそうである. すなわち, この $S_P(X, d)$ は距離空間に値をとる不変量である. 定理1の証明の要点の一つは, この不変量が連続体濃度個の異なる値をとるように空間の族を構成することである.

二つ目の研究成果を紹介する. エキゾチックな型 (u, v, w) に対して, 距離空間 (X, d) が全エキゾチックな (u, v, w) 型を持つとは, (X, d) が (u, v, w) 型を持ち, $T_P(X, d) = 0$ を満たす $P \in \{D, UD, UP\}$ に対して $S_P(X, d) = X$ であるときに言う. つまり, 各点の任意の近傍が性質 P を満たさないということである. 全エキゾチック性に関して以下の定理を得た.

定理 2 ([3]). 任意のエキゾチックな型 (u, v, w) に対して, 全エキゾチックな (u, v, w) 型を持つコントロール距離空間が存在する.

定理2は定理1とは異なる形でエキゾチックなコントロール距離空間の豊富さを主張している.

距離空間 (X, d) に対して, そのハウスドルフ次元を $\dim_H(X, d)$ で表し, アソー次元を $\dim_A(X, d)$ で表す. 一般に, アソー次元 $\dim_A$ はハウスドルフ次元 $\dim_H$ 以上であることに注意する.

今回の研究で導入した概念を組み合わせることにより, 与えられた2つの非負拡張実数をそれぞれハウスドルフ次元, アソー次元として持つ距離空間の構成に成功した.

定理 3 ([3]). 任意の組 $(a, b) \in [0, \infty]^2$ が $a \leq b$ を満たすとする. このときコントロール距離空間 (X, d) が存在して $\dim_H(X, d) = a$ および $\dim_A(X, d) = b$ が成り立つ.

参考文献

- [1] G. David and S. Semmes, *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self Similar Geometry through Metric and Measure*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 7, Oxford Univ. Press, 1997.
- [2] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] Y. Ishiki, *Quasi-symmetric invariant properties of Cantor metric spaces*, preprint, arXiv:1710.08190v3.
- [4] J. M. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal Dimension: Theory and Application*, Univ. Lecture Ser. 54, Amer. Math. Soc., 2010.
- [5] S. Semmes, *Metric Spaces and Mapping Seen at Many Scales*, in M. Gromov, with Appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, (J. LaFontaine and P. Pansu, eds), Progress in Math. 152, Birkhauser, 1999, pp. 401–518.