

距離関数の補間と距離関数の空間

伊敷 喜斗 (筑波大数理物質)*

距離化可能空間 X に対して、記号 $M(X)$ で X 上の距離関数で、 X と同じ位相を生成するもの全体を表すことにする. 1930 年に Hausdorff は距離化可能空間 X の閉部分集合 A とその上の距離 $d \in M(A)$ に対して X 上の距離 $D \in M(X)$ が存在して $D|_A = d$ となることを示した. 二つの距離 $d, e \in M(X)$ に対して、 ∞ の値も許した距離 $\mathcal{D}_X(d, e) = \sup_{x, y \in X} |d(x, y) - e(x, y)|$ を導入することにより、 $M(X)$ にも距離空間の構造が入る. 以下では $M(X)$ には $\mathcal{D}_X$ によって生成される位相が備わっていると考え. 筆者は上で述べた Hausdorff の拡張定理を $M(X)$ 上の距離 $\mathcal{D}_X$ の情報も含む距離関数の族の補間定理として一般化した.

定理 1 ([1]). X を距離化可能とし、 $\{S_i\}_{i \in I}$ を X の閉集合からなる疎な空でない族とする. そして $d \in M(X)$ とし、 $\{e_i\}_{i \in I}$ を各 $i \in I$ について $e_i \in M(S_i)$ を満たす距離関数の族とする. このとき X 上の距離関数 $m \in M(X)$ が存在して以下を満たす.

(1) 任意の $i \in I$ について $m|_{S_i^2} = e_i$ である.

(2) $\mathcal{D}_X(m, d) = \sup_{i \in I} \mathcal{D}_{S_i}(e_i, d|_{S_i^2})$.

この定理を用いて、位相空間 $M(X)$ の位相構造を調べることができる. 特に距離空間の有限集合を用いて定義される幾何学的性質を満たす距離関数全体が $M(X)$ の中でどのような位相的分布を持つのか決定することができた. 以下必要な定義を述べる.

記号 $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ で $\mathbb{N}$ の空でない部分集合からなる集合を表し、 $W \in \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ に対して、 $\text{Seq}(W, S)$ で S 内の単射な添字を持つ点列 $\{a_i\}_{i=1}^M$ で $M \in W$ を満たすもの全体を表すことにする. また、位相空間 T に対して $\mathcal{F}(T)$ で T の閉集合全体からなる集合を表す.

定義 1 ([1]). Q を高々可算な集合とし、 P を位相空間とする. また、 F は Q から $\mathcal{F}(P)$ への写像で、 G は Q から $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ への写像とする. そして Z は集合として、 ϕ は $q \in Q$ と距離化可能空間 X に対して写像 $\phi^{q, X} : \text{Seq}(G(q), X) \times Z \times M(X) \rightarrow P$ を割り当てる対応であるとする. このとき 6 つ組 $\mathfrak{G} = (Q, P, F, G, Z, \phi)$ が以下の条件を満たすとき、これを**伝播径数**と呼ぶ.

(1) 任意の $q \in Q$ と任意の距離化可能空間 X と $a \in \text{Seq}(G(q), X)$ 、そして $z \in Z$ を固定したとき、 $\phi^{q, X}(a, z, d)$ は $d \in M(X)$ について連続写像である.

(2) 任意の $q \in Q$ と任意の距離化可能空間 X 、そして X の任意の部分集合 S と任意の $z \in Z$ 及び任意の $a \in \text{Seq}(G(q), S)$ について、 $\phi^{q, X}(a, z, d) = \phi^{q, S}(a, z, d|_{S^2})$ が成り立つ.

定義 2 ([1]). 伝播径数 $\mathfrak{G} = (Q, P, F, G, Z, \phi)$ に対して、距離空間 (X, d) が **$\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つ**とは、ある $q \in Q$ が存在して、任意の $z \in Z$ と任意の $a \in \text{Seq}(G(q), X)$ に対して $\phi^{q, X}(a, h, d) \in F(q)$ を満たすときにいう. また、 (X, d) が **$\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たさない**とき、 (X, d) は**反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つ**という.

距離空間が $\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たすとき、その部分距離空間も $\mathfrak{G}$ 伝播性質を満たす。

定義 3 ([1]). 伝播径数 $\mathfrak{G} = (Q, P, F, G, Z, \phi)$ が**特異的である**とは、任意の $q \in Q$ と $\epsilon \in (0, \infty)$ に対して $z \in Z$ と有限距離空間 (S, d_S) が存在して、以下を満たすときにいう。

- (1) $\text{diam}_{(S, d_S)}(S) \leq \epsilon$.
- (2) $\text{card}(S) \in G(q)$.
- (3) $\phi^{q, S}(S, h, d_S) \in P \setminus F(q)$.

ここで、 diam は直径を表し、 card は濃度を表す。

位相空間の部分集合が G_δ であるとは、それが可算個の開集合の共通部分として表されるときにいう。以上の定義のもとで、定理1を利用して筆者は以下の定理を証明した。

定理 2 ([1]). 距離化可能空間 X は離散空間ではないとし、伝播径数 $\mathfrak{G}$ は特異的であるとする。このとき集合

$$\{d \in M(X) \mid (X, d) \text{ は反 } \mathfrak{G} \text{ 伝播性質をもつ}\}$$

は位相空間 $M(X)$ の中で稠密 G_δ 集合である。

特異的な伝播径数を持つ伝播性質として具体的には以下のものがある。

命題 1. 距離空間に対する以下の性質は特異的な伝播径数を持つ伝播性質として表すことができる。

- (1) 二倍性質.
- (2) 一様不連結性.
- (3) 超距離不等式を満たすこと.
- (4) トレミーの不等式を満たすこと.

よって、定理2から、 X を離散的ではない距離化可能空間とすると、命題1にあげられた性質の否定を満たす距離関数は $M(X)$ の稠密 G_δ 集合をなす。一方でグロモフ双曲性は伝播性質として表すことができるが特異的な伝播径数を持たず、グロモフ双曲性の否定を満たす距離関数の全体は $M(X)$ の中で稠密ではない。

局所化された伝播性質についても距離関数の空間の中での位相分布を調べた。

定義 4 ([1]). 伝播径数 $\mathfrak{G}$ に対して距離空間 (X, d) が**局所反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つ**とは X の任意の空でない開集合が反 $\mathfrak{G}$ 伝播性質を持つときにいう。

位相空間 X を第二可算で局所コンパクトハウスドルフ空間とすると、空間 $M(X)$ は完備距離付可能であり、特に Baire 空間である。これを利用して次の定理を証明した。

定理 3 ([1]). 位相空間 X は第二可算で局所コンパクトハウスドルフであるとし、さらに局所的に離散ではないとする。このとき特異的な伝播径数 $\mathfrak{G}$ に対して集合

$$\{d \in M(X) \mid (X, d) \text{ は局所反 } \mathfrak{G} \text{ 伝播性質をもつ}\}$$

は位相空間 $M(X)$ の中で稠密 G_δ である。

参考文献

- [1] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, 2020: arXiv:2003.13277.