

超距離関数の埋め込み, 拡張, そして補間定理

伊敷 喜斗 (筑波大数理物質)*

集合 X 上の距離関数 $d: X^2 \rightarrow [0, \infty)$ が**超距離関数**, もしくは**非アルキメデス的距離関数**であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対して**強三角不等式**と呼ばれる以下の不等式

$$d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y)$$

を満たすときにいう. ここで, $\vee$ は $\mathbb{R}$ における $\max$ 演算子とする. 集合 S が**値集合**であるとは $S \subset [0, \infty)$ と $0 \in S$ を満たすときにいう. 距離関数 d が S -**値**であるとは $d(X^2) \subset S$ を満たすときにいう. 集合 X と X 上の S -値超距離関数の対 (X, d) を S -**値超距離空間**と呼ぶ. 超距離関数は通常の距離関数の 0 次元的な類似物と考えることができ, 距離関数に対する命題の超距離関数版が成り立つことが期待され, 証明が試みられている. 筆者は以下の五つの定理に対する超距離空間版を証明した. すなわち, Arens–Eells の閉等長埋め込み定理, Hausdorff の距離関数の拡張定理, Niemytzki–Tychonoff の完備距離を用いたコンパクト性の特徴付け, そして筆者 [?] による距離関数族の補間定理と距離関数の空間の稠密 G_δ 集合に関する定理である.

可換環 R に対して, V を R -加群とする. このとき関数 $\|*\|: V \rightarrow [0, \infty)$ が V 上の**超ノルム**であるとは以下の三つの条件を満たすときにいう.

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. 任意の $x \in V$ について $\|-x\| = \|x\|$ を満たす;
3. 任意の $x, y \in V$ について $\|x + y\| \leq \|x\| \vee \|y\|$ を満たす.

この場合 R -加群 V と V 上の超ノルム $\|*\|$ の対 $(V, \|*\|)$ を**超ノルム付き R -加群**と呼ぶ.

以下の定理は距離空間に対する Arens–Eells の埋め込み定理の超距離空間版である.

定理 1 ([?]). S を二点以上点を持つ値集合とし, R を整域であるとし, また (X, d) を S -値超距離空間とする. このとき, S -値超ノルム付き R -加群 $(V, \|*\|)$ と等長埋め込み $I: X \rightarrow V$ が存在して以下を満たす.

- (1) $I(X)$ は $(V, \|*\|)$ の閉集合である;
- (2) $I(X)$ は V の R -線型独立集合である.

さらに (X, d) が完備ならば, 空間 $(V, \|*\|)$ を完備なものとして選べる.

位相空間 X に対して $\text{UM}(X, S)$ で, X と同じ位相を生成する X 上の S -値超距離関数全体を表すことにする. $d, e \in \text{UM}(X, S)$ に対して, $\mathcal{UD}_X^S(d, e)$ を, 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \leq e(x, y) \vee \epsilon$ と $e(x, y) \leq d(x, y) \vee \epsilon$ を満たす $\epsilon \in [0, \infty]$ の下限として定義する. このとき $\mathcal{UD}_X^S: \text{UM}(X, S)^2 \rightarrow [0, \infty]$ は $\text{CL}(S) \cup \{\infty\}$ に値をとる超距離関数となる. また, $\text{UM}(X, S)$ が空でないとき, X を S -**値超距離化可能**であるという.

Hausdorff は距離化可能空間の任意の閉集合上の任意の距離関数は全体空間に距離関数として拡張できることを証明した. 上で述べた等長埋め込み定理??を用いて Hausdorff の拡張定理の超距離関数版である以下の定理が証明できる.

定理 2 ([?]). S を値集合として, X を S -値超距離化可能な空間とし, A を X の閉集合とする. このとき任意の $d \in \text{UM}(A, S)$ に対して $D \in \text{UM}(X, S)$ が存在して, $D|_{A^2} = e$ を満たす. さらに X が完備距離化可能で e が完備ならば, D を完備なものとして選べる.

Hausdorff は自身の拡張定理を用いて, Niemytzki–Tychonoff による距離関数の完備性を用いたコンパクト性の特徴付け定理の簡単な証明を与えた. Hausdorff の方法をもとにし, 定理??を用いて以下の Niemytzki–Tychonoff の定理の超距離関数版を証明した.

値集合 S が**可算共始数を持つ**とは, S 内の 0 でない狭義の単調減少数列 $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$ を満たすときにいう.

定理 3 ([?]). S を可算共始数を持つ値集合とし, X を S -値超距離化可能な位相空間とする. このとき X がコンパクトであることと, $\text{UM}(X, S)$ の元がすべて完備距離であることは同値である.

実数 $C \in [1, \infty)$ に対して, 値集合 S が C -**準完備**であるとは, S の任意の有界部分集合 E に対して, $s \in S$ が存在して, $\sup E \leq s \leq C \cdot \sup E$ を満たすときにいう. また, 値集合について, ある $C \in [1, \infty)$ が存在して C -準完備になるとき, その値集合を単に**準完備**と呼ぶことにする. 以下の定理は筆者が証明した距離化可能空間の疎な閉集合族上の距離関数族に対する補間定理の超距離関数版である.

定理 4 ([?]). $C \in [1, \infty)$ とし, S を C -準完備な値集合とする. X を S -値超距離化可能とし, $\{A_i\}_{i \in I}$ を X の閉集合からなる疎な空でない族とする. そして $d \in \text{UM}(X, S)$ とし, $\{e_i\}_{i \in I}$ を各 $i \in I$ について $e_i \in \text{UM}(A_i, S)$ を満たす距離関数の族とする. このとき $m \in \text{UM}(X, S)$ が存在して以下を満たす.

- (1) 任意の $i \in I$ について $m|_{S_i^2} = e_i$ である;
- (2) $\sup_{i \in I} \mathcal{UD}_{A_i}^S(e_i, d|_{A_i^2}) \leq \mathcal{UD}_X^S(m, d) \leq C \cdot \sup_{i \in I} \mathcal{UD}_{A_i}^S(e_i, d|_{A_i^2})$.

さらに X が完備で, 各 e_i が完備距離ならば, m を完備距離として選ぶことができる.

筆者は[?]において**伝播性質**という, 空間の有限集合を用いて定義される幾何学性質を導入した. 伝播性質は**伝播径数**と呼ばれる六つ組によって決定される. 例えば二倍性質やグロモフ双曲性は異なる伝播径数によって定義される伝播性質である. 論文[?]において, 筆者は伝播性質が**特異的**な伝播径数で定義されている場合には, その伝播性質を満たさない距離の集合は距離関数の空間の中で稠密 G_δ 集合を形成することを証明した. 論文[?]で, 筆者は値集合 S に対して, S -**超特異的**という条件を新たに導入し, 先に述べた稠密 G_δ 定理の超距離関数の空間に対する類似物を定理??を用いて証明した.

定理 5 ([?]). S を可算共始数を持つ準完備値集合とする. S -値超距離化可能空間 X は離散空間ではないとし, 伝播径数 $\mathfrak{G}$ は S -超特異的であるとする. このとき集合

$$\{d \in \text{UM}(X, S) \mid (X, d) \text{ は } \mathfrak{G} \text{ 伝播性質を満たさない}\}$$

は位相空間 $\text{UM}(X, S)$ の中で稠密 G_δ 集合である.

参考文献

- [1] Y. Ishiki, *An interpolation of metrics and spaces of metrics*, 2020: arXiv:2003.13277.
- [2] Y. Ishiki, *An embedding, an extension, and an interpolation of ultrametrics*, 2020: arXiv:2008.10209.