

Assouad 次元と距離空間の収束について

伊敷 喜斗 (筑波大数理物質)*

Assouad[1, 2, 3] は距離空間のユークリッド空間への双リプシッツ埋め込み可能性と関連する距離空間の幾何学次元を導入し研究した。これは今日では Assouad 次元と呼ばれている。一般に Assouad 次元を下から評価することは困難である。Mackay と Tyson[6] は距離空間の Assouad 次元を彼らが定義する意味での接錐の Assouad 次元によって下から評価できることを証明した。つまり W を距離空間 X の接錐として、 $\dim_A W \leq \dim_A X$ が成り立つ。ここで $\dim_A$ は Assouad 次元を表す。本講演では、接錐や漸近錐の一般化と見なせる、距離空間の擬錐という概念を導入する。正の実数 h と距離空間 X に対して、 (X, hd_X) という距離空間を hX で表す。

定義 0.1. X を距離空間とし、 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を X の部分集合の列とし、さらに $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を $(0, \infty)$ 内の点列とする。距離空間 P が $(\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ で近似される X の擬錐であるとは $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{GH}(u_i A_i, P) = 0$ となる時にいう。ここで、 d_{GH} は Gromov–Hausdorff 距離である。

例えば、距離空間の接錐あるいは漸近錐の、基点を中心にした閉球は擬錐になる。

距離空間 X に対して、 X の擬錐全体から成るクラスを $PC(X)$ で表す。擬錐の概念を導入することにより、Assouad 次元の Mackay–Tyson 評価を一般化することができた。

定理 1. X を距離空間とする。このとき任意の $P \in PC(X)$ について、

$$\dim_A P \leq \dim_A X.$$

距離空間に対するウルトラリミットの概念は、距離空間列の (Gromov–Hausdorff) 極限空間のように振る舞う空間を作り出す方法である。 $\mathcal{U}$ を $\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルターとする。基点つき距離空間の列 $\{(X_i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して、 $\lim_{\mathcal{U}}(X_i, p_i)$ で $\mathcal{U}$ に関する $\{(X_i, p_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ のウルトラリミットを表すことにする。ウルトラリミットは常に存在する。ウルトラリミットを用いても、Assouad 次元の評価をすることができる。

定理 2. X を距離空間とする。 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を X の部分集合の列とし、 $\{u_i\}_i \in \mathbb{N}$ を $(0, \infty)$ 内の列とする。各 $i \in \mathbb{N}$ ごとに点 $a_i \in A_i$ をとる。このとき $\mathbb{N}$ 上の任意の非単項超フィルター $\mathcal{U}$ に対して

$$\dim_A(\lim_{\mathcal{U}}(u_i A_i, a_i)) \leq \dim_A X.$$

共形次元論において、共形 Assouad 次元は擬対称写像の不変量のひとつとして研究されている ([6] を参照)。一般に共形 Assouad 次元の正確な値を求めることは非常に困難である。講演者はコンパクト集合列で近似される擬錐の共形 Assouad 次元で元の距離空間のそれをしたから評価できることも証明した。

距離空間 X に対して、 X のコンパクト部分集合列 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と $(0, \infty)$ 内の列 $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ で近似される X の擬錐全体から成るクラスを $KPC(X)$ で表す。

定理 3. X を距離空間とする。このとき任意の $P \in KPC(X)$ に対して

$$\text{Cdim}_A P \leq \text{Cdim}_A X$$

日本学術振興会特別研究員 (DC1)

* e-mail: ishiki@math.tsukuba.ac.jp

である．ここで Cdim_A は共形 Assouad 次元を表す．

距離空間 X が $(\omega_0 + 1)$ -距離空間であるとは、 X が位相空間として、可算離散位相空間の一点コンパクト化に同相であるときにいう．

講演者はあらゆるコンパクト距離空間を擬錐として含む $(\omega_0 + 1)$ -距離空間を構成した．

定理 4. $(\omega_0 + 1)$ -距離空間 X が存在して、 $\text{PC}(X)$ は全てのコンパクト距離空間を含む．

距離空間が弧長空間であるとは、その空間の 2 点間の距離が、それらを結ぶ曲線の長さの下限に一致するときにいう．また、距離空間が固有であるとは、その空間の任意の有界閉集合がコンパクトになるときにいう．

定理 4 と同様にして、あらゆる固有弧長空間を接錐、あるいは漸近錐として含む距離空間を構成した．

定理 5. $(\omega_0 + 1)$ -距離空間 X が存在して、任意の基点付き固有弧長空間は X の接錐になる．

定理 6. 可算固有距離空間 X が存在して、任意の基点付き固有弧長空間は X の漸近錐になる．

定理 4, 5 そして 6 で述べられた距離空間は、定理 1 の位相次元や、ハウスドルフ次元、もしくは共形ハウスドルフ次元に対するアナロジーが成り立たないことを示す例である．実際、 $\omega_0 + 1$ -距離空間や可算距離空間の位相次元、ハウスドルフ次元、共形ハウスドルフ次元は全て 0 になるが、対してこれらの次元が無限大になるようなコンパクト距離空間や、固有弧長空間が存在するからである．

参考文献

- [1] P. Assouad, *Espace métrique, plongements, facteurs*, U. E. R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay, 1977. Thèse de doctorat, Publications Mathématique d'Orsay, No. 233-7769.
- [2] P. Assouad, *Étude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans $\mathbb{R}^n$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 288 (15) (1979), A731–A734.
- [3] P. Assouad, *Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$* , Bull. Soc. math. France, 111, (1983), 429–448.
- [4] J. M. Fraser and H. Yu, *Arithmetic patches, weak tangents and dimension*, Bull. London Math. Soc. 50 (2018), 85–95.
- [5] Y. Ishiki, *On the Assouad dimension and convergence of metric spaces*, preprint, arXiv:1911.07455v1.
- [6] J. M. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal dimension theory: theory and application*, Univ. Lecture Ser. 54, Amer. Math. Soc., 2010.