

全体空間と同じ Assouad 次元を持つ部分距離空間の特徴付け

伊敷 喜斗 (筑波大数理物質)*

Fraser と Yu [2] は, 数論的な観点から, N 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の部分空間が Assouad 次元 N を持つための特徴付けを与えた. すなわち, $\mathbb{R}^N$ の任意の部分距離空間 F に対して, 以下の六つの条件は同値であることを証明した.

- (1) F は漸近的に任意に大きな等差パッチ (等差数列の高次元版) を含む.
- (2) F は漸近的 Steinhaus 性質を満たす.
- (3) $\dim_A F = N$ である. ここで $\dim_A$ は Assouad 次元を表す.
- (4) $\text{Cdim}_A F = N$ である. ここで Cdim_A は共形 Assouad 次元を表す.
- (5) F は内点がある接錐を持つ.
- (6) $\mathbb{R}^N$ の標準単位閉球 $B(0, 1)$ は F の接錐である.

筆者 [4] は, タイリング空間という距離空間を導入し, Fraser–Yu の特徴付け定理をタイリング空間に対して一般化した. タイリング空間のクラスは, Euclid 空間や, Cantor 集合, そして様々なフラクタルを含む.

最初にタイリング空間の定義を述べる. 以下では, 距離空間 X に対して $\text{cov}(X)$ で X の被覆全体からなる集合を表す. また, X の部分集合 A に対して $\delta(A)$ で A の直径を表す. 点 $x \in X$ と正の実数 r に対して $U(x, r)$ で x を中心とする半径 r の開球を表す. そして, 正の実数 h と距離空間 (X, d_X) に対して, hX で距離空間 (X, hd_X) を表す.

定義 1 ([4]). X を距離空間, P を $\mathbb{N}$ もしくは $\mathbb{Z}$ から $\text{cov}(X)$ への写像とする. 記号 P_n で n での P の値を表し, $\text{dom}(P)$ で P の定義域を表す. 自然数 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ と実数 $s \in (0, 1)$ に対し, 組 (X, P) が (N, s) -タイリング空間であるとは以下を満たすときにいう.

- (S1) 任意の $n, m \in \text{dom}(P)$ が $n < m$ を満たすとき, 任意の $A \in P_n$ に対して, $\text{card}([A]_{m-n}) = N^{m-n}$ と $A = \bigcup [A]_{m-n}$ が成り立つ. ここで card は濃度を表し, $[A]_{m-n} = \{T \in P_m \mid T \subset A\}$ である.
- (S2) 任意の $n \in \text{dom}(P)$ と任意の $A, B \in P_n$ に対して, $m \in \text{dom}(P)$ と $C \in P_m$ が存在して $A \cup B \subset C$ を満たす.
- (T1) 正の実数 D_1 と D_2 が存在して, 任意の $n \in \text{dom}(P)$ と任意の $A \in P_n$ に対して, $D_1 \leq \delta(A)/s^n \leq D_2$ が成り立つ.
- (T2) 正の実数 E が存在して, 任意の $n \in \text{dom}(P)$ と任意の $A \in P_n$ に対して, 点 $p_A \in A$ が存在して, $U(p_A, Es^n) \subset A$ を満たす.
- (U) (X, P) のタイルからなる列 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して部分列 $\{A_{\phi(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ と (X, P) のタイル T が存在して, $\delta(A_{\phi(i)})^{-1}A_{\phi(i)}$ は $\delta(T)^{-1}T$ に Gromov–Hausdorff 位相で収束する.

主定理を述べるために, 筆者 [3] が導入した擬錐の概念を用いる. 距離空間 X の部分集合列 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, 距離空間 P が $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ で近似される X の擬錐であるとは, 正の実数列 $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して, $i \rightarrow \infty$ のとき $u_i A_i$ が P に Gromov–Hausdorff 位相で収束するときという. 距離空間 X に対して, $\text{PC}(X)$ で X の擬錐全体からなるクラスを表し, $\text{KPC}(X)$ で X のコンパクト集合列で近似される擬錐全体からなるクラスを表す.

タイリング空間 (X, P) の部分距離空間 F に対して, $\text{TPC}(F)$ で (X, P) のタイルの列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を用いて $\{T_i \cap F\}_{i \in \mathbb{N}}$ と表される集合列で近似される擬錐全体のクラスを表す. また, A を (X, P) のタイルとすると, F がタイル A に対する漸近的 *Steinhaus* 性質を満たすとは, A の有限部分集合 S と正の実数 ϵ に対して, F の有限部分集合 T が存在し, $d_{GH}(T, \delta S) \leq \delta \epsilon$ を満たすときにいう. ここで d_{GH} は Gromov–Hausdorff 距離を表す.

次の定理が Fraser–Yu の特徴付け定理のタイリング空間に対する一般化である.

定理 1 ([4]). (X, P) を二倍性質を満たす (N, s) -タイリング空間とする. このとき X の任意の部分距離空間 F に対して以下の五つの条件は同値である:

- (1) $\dim_A F = \dim_A X$.
- (2) (X, P) のタイル A が存在して, $A \in \text{PC}(F)$ である.
- (3) (X, P) のタイル A が存在して, $A \in \text{TPC}(F)$ である.
- (4) (X, P) のタイル A が存在して, $A \in \text{KPC}(F)$ である.
- (5) (X, P) のタイル A が存在して, F は A に対する漸近的 *Steinhaus* 性質をもつ.

また筆者 [4] は, 多くの相似距離空間がタイリング空間になることも示した. 完備距離空間 X と正の実数 L について, $f: X \rightarrow X$ が X の L -相似変換であるとは, 任意の $x, y \in X$ について $d_X(f(x), f(y)) = L d_X(x, y)$ であるときにいう. 自然数 $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ と実数 $s \in (0, 1)$ に対して, N 個の X の s -相似変換からなる関数族 $\mathcal{S}$ を X 上の (N, s) -相似反復関数系と呼ぶ. 以下では, $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=0}^{N-1}$ と置く. 完備距離空間 X の空でない部分距離空間 F が $\mathcal{S}$ のアトラクターであるとは, F がコンパクトであり, $F = \bigcup_{i=0}^{N-1} S_i(F)$ を満たすときにいう. 以下では, $\mathcal{S}$ のアトラクターを $A_{\mathcal{S}}$ と書く. 実際, X の完備性から, $\mathcal{S}$ のアトラクターは常に唯一つ存在する. また, $\mathcal{S}$ が従順開集合条件を満たすとは, X の開集合 V が存在して次の三つの条件を満たすことである. (O1) $\bigcup_{i=0}^{N-1} S_i(V) \subset V$. (O2) $\{S_i(V)\}_{i=0}^{N-1}$ は互いに交わらない. (O3) $V \cap A_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$. 次に, W を $\{0, \dots, N-1\}$ から生成された語全体の集合とする. 各語 $w = w_0 \cdots w_l$ に対して, $S_w = S_{w_l} \circ \cdots \circ S_{w_0}$ と書く. ただし各 w_i は $\{0, \dots, N-1\}$ に属している. 写像 $P_{\mathcal{S}}: \mathbb{N} \rightarrow \text{cov}(A_{\mathcal{S}})$ を

$$(P_{\mathcal{S}})_n = \{S_w(A_{\mathcal{S}}) \mid w \in W \text{ かつ } |w| = n\}, \quad (1)$$

と定義する. ここで $|w|$ は語 w の長さである.

定理 2 ([4]). 完備距離空間上の (N, s) -相似反復関数系 $\mathcal{S}$ は従順開集合条件を満たすとする. このとき $\mathcal{S}$ のアトラクター $A_{\mathcal{S}}$ と式 (1) で定義した写像 $P_{\mathcal{S}}$ の組 $(A_{\mathcal{S}}, P_{\mathcal{S}})$ は (N, s) -タイリング空間である.

この定理から, 三進 Cantor 集合や, Sierpiński のガasket などのフラクタル集合がタイリング空間の構造を持つことがわかる.

参考文献

- [1] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 2nd edition, J. Wiley and Sons, 2003.
- [2] J. M. Fraser and H. Yu, *Arithmetic patches, weak tangents and dimension*, Bull. London Math. Soc. 50 (2018), 85–95.
- [3] Y. Ishiki, *On the Assouad dimension and convergence of metric spaces*, preprint, 2019: arXiv:1911.07455.
- [4] Y. Ishiki, *A characterization of metric subspaces of full Assouad dimension*, preprint, 2019: arXiv:1911.10775.