GROMOV–HAUSDORFF 空間の位相

伊敷喜斗

概要. Gromov–Hausdorff 空間が実 Hilbert 空間 ℓ^2 と同相であることを示す．等長写像に関して同変な，全台を持つ確率測度の連続な対応と，すべての二点間の距離を制御する有限次元局所近似を構成する．これらの近似により，すべての距離化可能空間に対する絶対レトラクト性が得られる．また，コンパクト距離化可能空間を定義域とする連続写像の任意の可算族が，指定された開被覆に関して，像が離散族をなす写像で近似できることを示す．

目次

1. 序論 2
2. 共通の準備 9
2.1. Gromov–Hausdorff 収束とコンパクト性 9
2.2. 擬距離と距離商 12
2.3. 確率測度と弱収束 13
2.4. 1 の分割，可縮性，絶対レトラクト 18

第 I 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 I 連続な不変測度 21
3. 第 I 部の序論 21
4. 準備 23
4.1. Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間 23
4.2. Haar 確率測度と連続な確率分布 25
5. 連続な不変確率測度 26
5.1. 測度を持たない空間への開射影 27
5.2. 連続な確率分布とその平均 34
5.3. 測度付き空間のレトラクト 40

第 II 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 II コンパクト距離空間の局所有限次元近似 41
6. 第 II 部の序論 41
7. 準備 44
7.1. Lebesgue 空間における最良近似 44
7.2. コンパクト作用素とスペクトル分解 44
7.3. スペクトル摂動と一般固有空間 45
7.4. 正定値行列の平方根 47

キーワード. Gromov–Hausdorff 空間，Hilbert 空間，絶対レトラクト，確率測度，超空間.

8. 距離の有限次元近似 47
8.1. 距離作用素とそのスペクトル部分空間 48
8.2. 距離関数の近似 50
8.3. 有限スペクトル部分空間の連続性 53
8.4. ノルム空間への局所写像 67

第 III 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 III Gromov–Hausdorff 空間の絶対レトラクト性 79
9. 第 III 部の序論 79
10. 準備 82
10.1. 同変超空間と軌道空間 82
10.2. 支配と絶対拡張 83
11. 大域的近似による絶対拡張 84
11.1. 変化するノルムの等長表現 84
11.2. 超空間の軌道空間から得られる絶対レトラクト 87
11.3. 小さなホモトピー軌跡を持つ大域的近似 88
11.4. 絶対レトラクト 97

第 IV 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 IV Gromov–Hausdorff 空間は ℓ^2 と同相である 98
12. 第 IV 部の序論 98
13. 準備 100
13.1. 離散族と近接する写像 100
13.2. 距離積 100
13.3. Hilbert 空間の特徴付け 100
14. 離散近似と Hilbert 空間の位相 100
14.1. コンパクトな定義域に対する離散近似 101
14.2. 主定理の証明 104
15. 問題 106
参考文献 108

1. 序論

Gromov–Hausdorff 距離 $\mathcal{GH}$ は，二つのコンパクト距離空間の形の違いを定量化する．空でないコンパクト距離空間の等長類全体に Gromov–Hausdorff 距離 $\mathcal{GH}$ を入れた空間を $\mathcal{M}$ で表す．空間 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ を *Gromov–Hausdorff* 空間という．Antonyan [5, p. 2] は，$\mathcal{M}$ が ℓ^2 と同相かという問題を提起した．以下の分類定理を示すことにより，この問題に肯定的に答える．

定理 1.1 (定理 12.1)**.** 空間 $\mathcal{M}$ は *Hilbert* 空間 ℓ^2 と同相である．

Zava [60, arXiv v3, Theorem B] は，有限距離空間からなる $\mathcal{M}$ の部分空間が，いかなる Hilbert 空間にも粗埋め込みできないことを示した．特に，定理 1.1 の同相写像は双 Lipschitz 写像にはなり得ない．

関連研究. 定理 1.1 と比較するため，まず $\mathcal{M}$ の部分空間の分類を振り返る．各正整数 n に対し，Antonyan は，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合で表される $\mathcal{M}$ の部分空間を，一点を除いた Hilbert 立方体と同一視した [6, Corollary 5.3].

測地線と最適対応は，$\mathcal{M}$ の位相的分類の基礎となる距離構造を記述する．Ivanov，Nikolaeva，Tuzhilin [33, arXiv v1, Theorem 1] は，$\mathcal{M}$ の任意の二点を測地線で結べることを示した．Ivanov，Iliadis，Tuzhilin [32, arXiv v1, Theorem 2.6 and Corollary 2.7] は，コンパクト距離空間の間に最適対応が存在することを示し，それを用いて，Gromov–Hausdorff 距離を，共通の距離空間内の等長なコピーの間の Hausdorff 距離として実現した．同相写像による分類とのもう一つの比較対象は，全射等長写像に関する剛性である．Ivanov と Tuzhilin [34, Main Theorem] は，$\mathcal{M}$ の任意の全射等長写像が恒等写像であることを示した．Tuzhilin は [54] で Hausdorff 距離と Gromov–Hausdorff 距離の幾何を概説している．

従来の研究は，連続な族や埋め込まれたコンパクト空間を通じて $\mathcal{M}$ の位相を調べている．本論文の結果は，$\mathcal{M}$ 自身の位相型を決定する．著者は，Hilbert 立方体で連続的にパラメータ付けされた，分岐する Gromov–Hausdorff 測地線の族を構成した [26, Theorem 1.3]．また，任意のコンパクト距離化可能空間から，連続体 [27, Theorem 1.1]，指定された次元を持つ空間 [28, Theorem 1.3]，コンパクト距離木 [29, Theorem 1.1] のそれぞれからなる $\mathcal{M}$ の部分空間への位相的埋め込みを構成した．いずれの場合も，有限個の相異なる指定された値を取るように埋め込みを選べる．Byakuno [15, arXiv v1, Corollary 1.4] は，正の総和可能な長さを持つ閉区間の可算積に上限距離を入れた空間が，$\mathcal{M}$ へ等長埋め込みできることを示した．

空間全体 $\mathcal{M}$ の分類と比較するため，有限距離空間からなる部分空間の局所的記述と次元公式を振り返る．Iliadis，Ivanov，Tuzhilin [25, arXiv v1, Theorem 4.1] は，一般的な有限距離空間の十分小さな近傍が，同じ点数を持つ空間の部分空間内では，最大値ノルムを持つ有限次元空間の開部分集合と等長であることを示した．ここで一般的とは，非零の距離が互いに異なり，相異なる三点に関するすべての三角不等式が狭義に成り立つことを意味する．Nakajima，Yamauchi，Zava [46, arXiv v1, Theorem A] は，高々 n 点の空間からなる部分空間の位相次元が $n(n-1)/2$ であることを示した．$\mathcal{M}$ の大域的位相を調べる相補的な方法として，そのコンパクト化の研究がある．Nakajima と Shioya [45, arXiv v1, Main Theorem 1.2] は，$\mathcal{M}$ の稠密な位相的コピーを含むコンパクト距離化可能空間を構成した．

第 I 部では，$\mathcal{M}$ 上で確率測度を連続的に選択する．測度をデータの一部とする場合には，距離測度空間に関する位相的結果が比較対象となる．Kazukawa，Nakajima，Shioya [36, arXiv v1, Theorems 1.4–1.6] は，距離測度空間の空間が，box 位相と集中位相のいずれでも可縮かつ局所弧状連結であることを示した．本論文の分類はコンパクト距離空間を対象とする．Gromov–Hausdorff の枠組みの拡張として，非完備空間をその境界とともに扱うものがある．Shibahara [50, arXiv v1, Definition 3.2 and Theorem 1.1] は，非完備な前コンパクト局所コンパクト距離空間の等長類上に，境界付き Gromov–Hausdorff 距離を導入した．境界とは，距離による完備化の中での元の空間の補集合である．第 II 部の局所モデルは，代

表元の間の等長写像を記録する．個々の空間の間の等長写像は，Yuji [59, arXiv v2, Definition 5.1] がコンパクト距離空間の族を調べるために用いたモジュライスタックでも保持される．

第 III 部では，固定した周囲の距離空間内の超空間の大域的な類似物として $\mathcal{M}$ を調べる．この二つの設定の関係は，測地線の研究にも現れる．Mémoli と Wan [43, arXiv v2, Theorem 1] は，任意の Gromov–Hausdorff 測地線が，一つのコンパクト距離空間のコンパクト部分集合からなる Hausdorff 測地線として実現できることを示した．絶対レトラクト定理との比較のため，固定した Banach 空間のコンパクト部分集合の場合を振り返る．Curtis [17, Theorem 1.6] は，特に，Banach 空間の空でないコンパクト部分集合全体にそのノルムの Hausdorff 距離を入れた超空間が，絶対レトラクトであることを示した．本論文では，Banach 空間の空でないコンパクト部分集合からなる超空間をコンパクト群で割った商を用いて，$\mathcal{M}$ の恒等写像の近似を構成する．

第 IV 部で用いる Toruńczyk の特徴づけには，Urysohn 普遍距離空間の研究に先例がある．21 世紀初頭に，Uspenskij [55, arXiv v1, Theorem 2.1] は，この空間が ℓ^2 と同相であることを示した．Urysohn 空間は，任意の可分距離空間の等長なコピーを含み，有限部分集合の間の任意の等長写像が空間全体の全射等長写像へ拡張する完備可分距離空間である．

証明方針と四つの部． まず，$\mathcal{M}$ が距離化可能空間に対する絶対レトラクトであることを示す．次に，コンパクト距離化可能空間を定義域とする写像の列を，近似写像の像が離散族をなすように近似する．$\mathcal{M}$ は完備かつ可分なので，絶対レトラクト性と離散近似性から，Toruńczyk の特徴づけ [52, p. 248, assertion (i)] とその訂正 [53, Section C] により定理 1.1 が従う．第 I 部から第 III 部では，絶対レトラクト性に必要な近似を構成する．第 IV 部の離散近似の議論は，共通の準備と同部独自の距離の構成だけを用いる．図 1 は，この二つの議論を組み合わせて分類を示す仕組みを表す．

絶対レトラクト性の議論の難点は，等長群がコンパクト距離空間に依存することである．一般的なコンパクト距離空間に関する Rouyer の結果 [49, arXiv v1, Theorems 2 and 4] から，次が従う．

$$\overline{\{(X,d) \in \mathcal{M} \mid \mathrm{Isom}(X,d) = \{\mathrm{id}_X\}\}} = \mathcal{M}.$$

これから，一様距離を入れた等長群を対応させる写像も，$\mathcal{M}$ から自身への写像として不連続であることが従う．したがって，非自明な等長群を持つ空間も扱える構成が必要となる．各モデル近傍上で，変動する等長群から一つの固定した直交群への準同型を，局所的な点写像が同変となるように構成する．次に，1 の分割を用いて，局所的な点写像を Banach 空間内で結合する．この Banach 空間には直交群の可算積が作用する．その空でないコンパクト部分集合の軌道空間へ移ることにより，得られる近似はすべての座標の選択に依存しなくなる．

第 I 部．連続な不変確率測度． 第 1 部では，変動するコンパクト空間上の積分に用いる測度を構成する．この部の主結果である定理 5.9 は，任意の空でないコンパクト距離空間 (X,d) に Borel 確率測度 $\mathfrak{m}_{X,d}$ を対応させ

る．対応する各測度は全台を持ち，次が成り立つ．

$$\operatorname{supp}(\mathfrak{m}_{X,d}) = X.$$

任意の等長写像 $u\colon (X,d) \to (Y,e)$ に対し，この対応は次を満たす．

$$u_*\mathfrak{m}_{X,d} = \mathfrak{m}_{Y,e}.$$

測度の対応は，以下の意味で連続でもある．コンパクト距離空間 (Z,h) のコンパクト部分空間 X_j と X に，制限距離 d_j と d を入れると，次が成り立つ．

$$\mathcal{H}[h](X_j, X) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{m}_{X_j,d_j} \to \mathfrak{m}_{X,d} \quad \text{弱収束：} \mathfrak{Prob}(Z).$$

ここで，各測度は共通の周囲の空間上の確率測度とみなす．

固定したコンパクト空間では，その等長群上で平均することにより不変確率測度が得られる．本論文の構成では，空間が変動するときの連続性も保つ必要がある．このような測度を構成するため，全台を持つ不変測度付きコンパクト空間の空間が Polish であり，測度を忘れる写像が $\mathcal{M}$ への開全射であることを示す．Valov の定理（定理 4.8）により，この忘却写像は Milyutin 写像である．そこで，各ファイバー上の確率測度からなる連続族を一つ選び，各測度の重心を取って求める不変測度を得る．全台性と連続性は，第 II 部のスペクトル近似で用いる．

第 II 部．連続な有限次元近似． 第 II 部では，すべての二点間の距離を制御しながら，距離関数を有限次元のデータに置き換える．この部の主結果は定理 8.11 である．任意の $(X,d) \in \mathcal{M}$ と $b > 0$ に対し，(X,d) の近傍 $\mathcal{W}$ と，次の性質を持つ整数 $n \geq 1$ が得られる．等長類が $\mathcal{W}$ に属する各コンパクト距離空間 (Y,e) に対し，$\mathbb{R}^n$ 上のノルム N_Y と連続写像 $\mathbf{v}_Y\colon Y \to \mathbb{R}^n$ を構成する．任意の $y,z \in Y$ に対し，誘導される擬距離を次で定める．

$$q_Y(y,z) = N_Y\big(\mathbf{v}_Y(y) - \mathbf{v}_Y(z)\big).$$

$\mathcal{W}$ を縮めると，次が成り立つ．

$$\sup_{y,z\in Y} \big|q_Y(y,z) - e(y,z)\big| < b.$$

次元 n は $\mathcal{W}$ 上で一定だが，中心 (X,d) と誤差の尺度 b に依存してよい．定理 8.11 の (A4) の意味で，ノルム N_Y と点写像 $\mathbf{v}_Y\colon Y \to \mathbb{R}^n$ は，$O(n)$ に属する座標変換を除いて連続的に変化する．各等長変換群 $\operatorname{Isom}(Y,e)$ は，連続準同型

$$\rho_{Y,e}\colon \operatorname{Isom}(Y,e) \to O(n).$$

を通じて座標像 $\mathbf{v}_Y(Y) \subset \mathbb{R}^n$ に作用する．注意 8.12 により，任意の $\alpha \in \operatorname{Isom}(Y,e)$ に対して次が成り立つ．

$$\mathbf{v}_Y \circ \alpha = \rho_{Y,e}(\alpha) \circ \mathbf{v}_Y, \qquad N_Y \circ \rho_{Y,e}(\alpha) = N_Y$$

したがって，誘導される擬距離 q_Y は (Y,e) の等長写像の下で不変であり，座標変換は固定されたコンパクト群 $O(n)$ の中で行われる．

$\mathcal{W}$ を構成するため，第 I 部の測度を用いて，$L^2(X, \mathfrak{m}_{X,d})$ 上の距離作用素 $T_{X,d}$ を定める．任意の $f \in L^2(X, \mathfrak{m}_{X,d})$ と $x \in X$ に対し，次のようにおく．

$$(T_{X,d}f)(x) = \int_X d(x,z)f(z)\, d\mathfrak{m}_{X,d}(z).$$

これらの作用素とそのスペクトル座標は，Maria，Oudot，Solomon によって研究された [42, Section 3]．距離作用素の有限次元スペクトル部分空間によって距離関数を近似できる．局所モデルを作る際は，L^p での一意な最良近似を選ぶ．ここで，有限の指数 $2 \leq p < \infty$ は，定理 8.11 の (A9) にある中心での誤差評価を満たすように選ぶ．重複固有値を基底の直交変換によって扱えるように，各固有空間を丸ごと残す．第 III 部の構成では，コンパクトな座標像とそのノルムの両方を用いる．本稿における距離作用素の利用が，Gromov–Hausdorff 空間の研究に幾何解析とスペクトル幾何の手法をさらに応用するきっかけとなることを期待する．

[31, Theorem 1.1] により，固定した距離化可能空間の閉部分集合の離散族上で指定した距離を拡張する際に，一様な誤差評価が得られる．ここでの絶対レトラクト性の議論では，変動するコンパクト空間上の距離の近似を用い，その座標対は定理 8.11 の (A4) の収束条件を満たす．

第 III 部．絶対レトラクト性． 第 3 部の主結果である定理 9.1 では，$\mathcal{M}$ がすべての距離化可能空間に対する絶対レトラクトであることを示す．定理 11.8 では，$\mathcal{M}$ がすべての距離化可能空間に対する絶対拡張空間であることを示す．

連続関数 $\rho\colon \mathcal{M} \to (0,\infty)$ を固定する．各定義域の全体で誤差が ρ より小さい局所モデルからなる，可算で局所有限な被覆を選ぶ．局所モデルの添字 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ごとに，モデルの次元を n_i とする．各局所モデルについて，そのノルムを備えた $\mathbb{R}^{n_i}$ を，一様ノルムを備えた $C(\mathbb{S}^{n_i-1}, \mathbb{R})$ に線形かつ等長に埋め込む．ここで $\mathbb{S}^{n_i-1}$ は Euclid 単位球面である．この埋込みには，命題 11.1 に示す Banach–Mazur の定理の具体的な形を用いる．1 の分割を用い，これらの空間の ℓ^1 直和である可分 Banach 空間 E の中で点写像を組み合わせる．ノルムの表現は，座標の直交変換と両立する（命題 11.1 と 11.3）．コンパクト群

$$G = \prod_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} O(n_i)$$

は線形等長写像として E に連続的に作用する．各コンパクトな座標像の軌道を取ると，基底と等長類の代表元の選択に依存しなくなる．軌道空間 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)/G$ は Antonyan の結果により絶対レトラクトである（定理 11.4）．定理 11.7 により，連続写像

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{A} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{M}$$

と連続なホモトピー $Q\colon \mathcal{M} \times [0,1] \to \mathcal{M}$ を得る．任意の $(Y,e) \in \mathcal{M}$ に対し，このホモトピーは

$$Q((Y,e),0) = (Y,e), \tag{1.1}$$

と

$$Q((Y,e),1) = \Psi\Phi(Y,e). \tag{1.2}$$

を満たす．ホモトピーの軌跡は次の評価を満たす．

$$\operatorname{diam}_{\mathcal{GH}}\bigl\{Q((Y,e),t) \mid t \in [0,1]\bigr\} < \rho(Y,e). \tag{1.3}$$

ANR のレトラクトは ANR である．Hanner の支配定理（定理 10.3）は，レトラクションの等式を，各点の軌跡が任意に小さいホモトピーまで緩めることで，この事実を拡張する．(1.1)と(1.2)の写像および(1.3)の評価は，その仮定を満たす．したがって $\mathcal{M}$ は ANR である．ここではまず，可分距離化可能空間に対する ANR 性を得てから，定理 10.4 を用いて，すべての距離化可能空間に対する ANR 性を得る．すべての距離を 0 まで比例縮小すると，$\mathcal{M}$ を一点空間へ収縮できる．定理 2.26 の ANR と ANE の同値性を用いて定理 10.5 を適用すると，$\mathcal{M}$ は距離化可能空間に対する AE である．定理 2.26 の AE と AR の同値性により，絶対レトラクト性が従う．

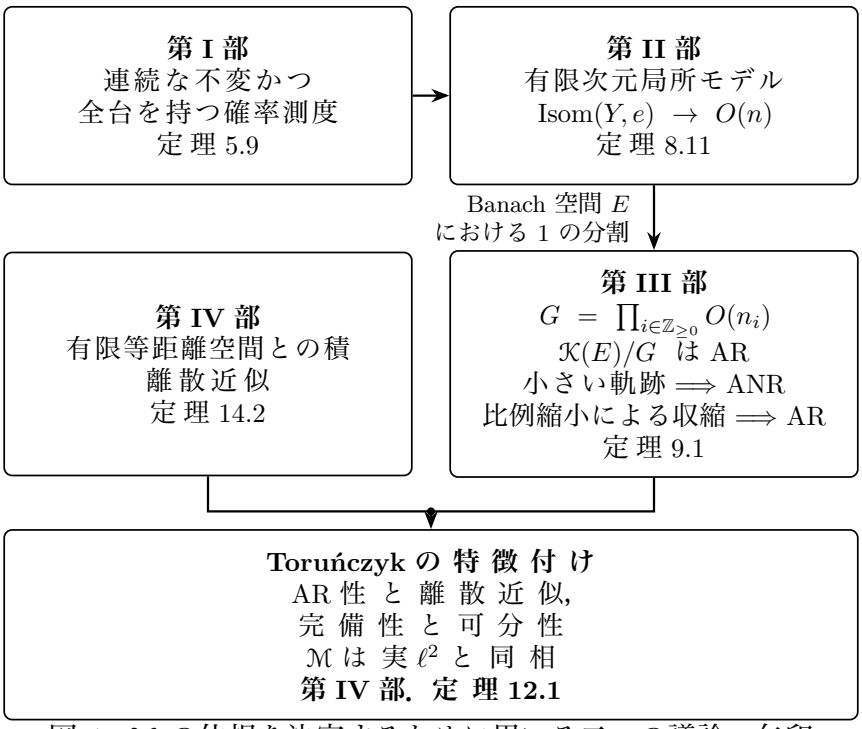


図 1. $\mathcal{M}$ の位相を決定するために用いる二つの議論．矢印は証明の依存関係を示す．第 I–III 部では，絶対レトラクト性を証明する．第 IV 部の離散近似定理では，共通の準備と，その部独自の距離の構成を用いる．これら二つの結論を完備性と可分性と合わせると，Hilbert 空間による分類が従う．

第 IV 部．離散近似と Hilbert 空間の位相． 第 IV 部では，Toruńczyk による Hilbert 空間の特徴付け（定理 13.3）に現れる近似条件を示す．この部の離散近似定理である定理 14.2 は，コンパクト距離化可能空間の任意の列 $\{K_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に適用できる．$f_i\colon K_i \to \mathcal{M}$ が連続であり，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{M}$ の開被覆ならば，次の二つの条件を満たす連続写像 $g_i\colon K_i \to \mathcal{M}$ が存在する．

$$\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall x \in K_i\ \exists U \in \mathcal{U}, \qquad \{f_i(x), g_i(x)\} \subset U,$$

$$\{g_i(K_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \text{は次の空間内で離散：} \mathcal{M}.$$

最後の条件は，$\mathcal{M}$ の各点が，これらの像のうち高々一つと交わる近傍を持つことを意味する．

十分小さな有限等距離空間との積を取ると，各入力の Gromov–Hausdorff 距離での変化を制御できる．すでに構成したコンパクトな像の中の分離集合の大きさの上界を超えるように，点数を帰納的に選ぶ．これにより像を分離し，点数を無限大へ発散させることで $\mathcal{M}$ 内での集積を防ぐ．この構成は，第 I 部から第 III 部の結果とは独立である．すべての定義域を Hilbert 立方体 $Q = [0,1]^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ とすると，Toruńczyk の定理の離散近似条件を得る．この条件を，完備性，可分性，第 III 部の絶対レトラクト性と組み合わせ，定理 1.1 を証明する．

主定理は局所可縮性の問いにも答える．ここでいう局所可縮性とは，各点の任意の近傍 U が，U への包含写像が零ホモトピックであるような近傍 V を含むことをいう．定理 1.1 により，各点は，その点へ強変形レトラクトする開集合からなる近傍基を持つ．論文の末尾では，十分小さい Gromov–Hausdorff 球の可縮性を未解決問題として挙げる（問題 15.3）．

形式検証. 定理 1.1 の証明は，文献に由来する五つの仮定を明示して Lean 4 で形式化した．その仮定は，開写像上の確率測度に関する Valov の定理，同変超空間と軌道空間に関する Antonyan の二つのレトラクト定理，Hanner の支配定理，および Toruńczyk による Hilbert 空間の特徴付けである．付随するリポジトリの引用したコミット（`lean-gh-space-hilbert`，コミット `8b25d3fc5b9f`）において，Comparator は形式定理 `PalomarPaperN.main` を受理し，NanoDa，con-ron および Lean のカーネルはその証明を受理した．文献に由来する五つの結果は，形式化の中でも仮定として残る．

構成. 序論と節 2 では，四つの部に共通する準備を述べる．各部にはそれぞれ独自の準備もあり，順に 4 節，7 節，10 節，13 節に置く．第 I 部は，節 3 で導入し，節 5 で連続な不変確率測度を構成する．第 II 部は，節 6 で導入し，節 8 でこれらの確率測度を用いて有限次元局所モデルを構成する．第 III 部は，節 9 で導入し，節 11 でモデルを大域的近似へ組み合わせ，絶対レトラクト性を示す．第 IV 部は，節 12 で導入し，節 14 で離散近似性を示して定理 1.1 の証明を完結させる．最後の節 15 では，関連する空間と GH 球の幾何に関する問題を述べる．

規約と記法. 集合 X の濃度を $\mathrm{Card}(X)$ で表す．$\mathcal{M}$ の点を表す距離空間 (X,d) はすべて空でなくコンパクトとする．$\mathcal{M}$ 内では，このような対をその等長類と同一視する．記号 X は，d が誘導する位相を入れた台集合を表す．$\mathfrak{m}_{X,d}$ のような構成の添字は，指定された対 (X,d) を表す．(Z,h)

への等長埋め込みが指定されている場合は，埋め込まれた部分集合と制限距離にも同じ記号を用いる．X 上の恒等写像を id_X で表す．定義域が指定されている場合は添字を省く．Banach 空間と Hilbert 空間は，複素数体を明示しない限り実とする．X の空でないコンパクト部分集合全体を $\mathcal{K}(X)$ で表す．距離 d が指定されている場合は，その Hausdorff 距離 $\mathcal{H}[d]$ を入れる．距離化可能空間 S について，S 上の Radon 確率測度全体を $\mathcal{P}\mathrm{rob}(S)$ で表し，有界連続関数に関する弱収束位相を入れる．等長埋め込み $f\colon (X,d)\to(Y,e)$ とは，任意の $x,y\in X$ に対し $e(f(x),f(y))=d(x,y)$ を満たす写像である．本論文では，等長写像とは全射等長埋め込みを意味する．特に断らない限り，列の添字集合は $\mathbb{Z}_{\geq 0}=\{0,1,2,\dots\}$ とする．

AI の利用. GPT-6 に基づく OpenAI Codex を，数学的な構成と証明の探索・展開，文献調査，文章と LaTeX ソースの作成に用いた．研究と執筆の作業には，Haruhisa Enomoto が公開した `math-research-harness`（`https://github.com/haruhisa-enomoto/math-research-harness`）と `math-paper-skills`（`https://github.com/haruhisa-enomoto/math-paper-skills`）のカスタマイズ版を用いた．数学的内容と最終原稿については，著者が全面的に責任を負う．

謝辞. 著者は JSPS 科研費 JP24KJ0182 の助成を受けた．

2. 共通の準備

距離に関する収束とコンパクト性，距離商の比較，確率測度の弱収束を述べる．最後の小節では，可縮性と絶対拡張性の用語を定める．

2.1. Gromov–Hausdorff 収束とコンパクト性.

まず，距離の対応による公式とコンパクト性の判定条件を述べる．

距離空間 (X,d)，点 $x\in X$，半径 $r>0$ について，次のように書く．

$$B(x,r;d)=\{y\in X\mid d(x,y)<r\}.$$

部分集合 $A\subset X$ について，次のようにおく．

$$\mathrm{dist}_d(x,A)=\inf_{y\in A} d(x,y),\qquad \mathrm{dist}_d(x,\emptyset)=\infty.$$

X の空でないコンパクト部分集合全体を $\mathcal{K}(X)$ で表す．この集合上の *Hausdorff* 距離

$$\mathcal{H}[d]\colon \mathcal{K}(X)\times\mathcal{K}(X)\to[0,\infty).$$

を次で定める．任意の $S,T\in\mathcal{K}(X)$ に対し，次のようにおく．

$$\mathcal{H}[d](S,T)=\max\left\{\sup_{x\in S}\mathrm{dist}_d(x,T),\sup_{y\in T}\mathrm{dist}_d(y,S)\right\}.$$

$\mathcal{K}(X)$ の *Vietoris* 位相は，以下のように得られる集合からなる基を持つ．整数 $m\geq 1$ と X の開部分集合 $U_1,\dots,U_m$ に対し，次の集合を取る．

$$\left\{S\in\mathcal{K}(X)\;\middle|\; S\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_i,\quad S\cap U_i\neq\emptyset\ (1\leq i\leq m)\right\}.$$

定理 2.1 ([10, Exercises 2.2.11(a), (b) and 3.2.9])．(X,d) を距離空間とする．このとき，*Hausdorff* 距離は $\mathcal{K}(X)$ 上の *Vietoris* 位相を誘導する．X が可分ならば，$\mathcal{K}(X)$ も可分である．

補題 2.2 ([58, Chapter 2, Proposition 5.3, p. 40])．(X,d) と (Y,e) を距離空間とし，$L \geq 0$ とする．$f\colon X \to Y$ を *L-Lipschitz* 写像とする．このとき，任意の $S,T \in \mathcal{K}(X)$ に対し，$\mathcal{H}[e](f(S),f(T)) \leq L \cdot \mathcal{H}[d](S,T)$ が成り立つ．

$\varepsilon > 0$ に対し，部分集合 $A \subset X$ が次を満たすとき，ε-ネットという．

$$\forall x \in X \quad \exists z \in A \quad d(x,z) < \varepsilon.$$

任意のコンパクト距離空間は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限 ε-ネットを持つ．

空でない集合 X と Y の間の対応とは，二つの座標射影がともに全射となる $X \times Y$ の部分集合である．X と Y の間の対応全体を $\mathrm{Cor}(X,Y)$ で表す．距離空間 (X,d) と (Y,e) の間の対応 $R \in \mathrm{Cor}(X,Y)$ の歪みを次で定める．

$$\mathrm{dis}(R) = \sup\left\{ |d(x_0,x_1) - e(y_0,y_1)| \,\middle|\, (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in R \right\}.$$

定理 2.3 ([14, Theorem 7.3.25] and [54, arXiv v1, Theorem 6.12])．空でないコンパクト距離空間 (X,d) と (Y,e) に対し，*Gromov–Hausdorff* 距離は次を満たす．

$$\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)) = \frac{1}{2} \inf_{R \in \mathrm{Cor}(X,Y)} \mathrm{dis}(R). \tag{2.1}$$

同値な記述として，これは共通の距離空間内の (X,d) と (Y,e) の等長なコピーの間の *Hausdorff* 距離の下限である．

次の補題は，指定された対応を，共通の距離空間内で対応する点の間の距離を制御しながら実現する．定理 2.8 の証明では，補題 2.4 を用いて，収束するコンパクト距離空間の列を一つのコンパクト距離空間に埋め込む．

補題 2.4. (X,d) と (Y,e) を空でないコンパクト距離空間，$R \subset X \times Y$ を対応とし，$\eta > 0$ は $\mathrm{dis}(R) \leq 2\eta$ を満たすとする．このとき，非交和 $X \sqcup Y$ 上に両方の距離を拡張する距離 h が存在し，任意の $(x,y) \in R$ に対し次が成り立つ．

$$h(x,y) \leq \eta.$$

特に，$\mathcal{H}[h](X,Y) \leq \eta$ が成り立つ．

証明． [14, proof of Theorem 7.3.25, pp. 257–258] より従う． □

定理 2.5 ([54, arXiv v1, Theorem 7.18] の帰結)．$\mathcal{M}$ において $(X_j,d_j) \to (X,d)$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し正整数 m が存在し，各 X_j は濃度が高々 m の ε-ネットを持つ．

(X,d) を距離空間とし，$c > 0$ とする．部分集合 $S \subset X$ が次を満たすとき，c-分離であるという．

$$\forall x,y \in S, \qquad x \neq y \Longrightarrow d(x,y) \geq c.$$

系 2.6. $\mathcal{M}$ において $(X_j, d_j) \to (X, d)$ とし，$c > 0$ とする．このとき，正整数 m が存在し，各 X_j の任意の c-分離部分集合の濃度は高々 m である．

証明．定理 2.5 により，すべての X_j 内に，$\mathrm{Card}(\mathcal{N}_j) \leq m$ を満たす $c/3$-ネット $\mathcal{N}_j \subset X_j$ を選ぶ．任意の c-分離部分集合 $S_j \subset X_j$ に対し，S_j の各点に，距離が $c/3$ 未満の $\mathcal{N}_j$ の点を一つ対応させる．同じ像を持つ二点の距離は $2c/3$ 未満となるので，この対応は単射である．したがって，$\mathrm{Card}(S_j) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{N}_j) \leq m$ が成り立つ．これで濃度の一様な上界が得られた． □

Gromov–Hausdorff 空間 $\mathcal{M}$ の完備性と可分性を用いる．

定理 2.7 ([54, arXiv v1, Corollary 7.24])**.** 距離空間 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ は完備かつ可分である．

Gromov は，直径が一様に有界で，各正の半径での被覆数も一様に有界なコンパクト距離空間の族について，その各空間が等長埋め込みされる共通のコンパクト距離空間を構成した [22, Section 6, pp. 64–65]．[54, arXiv v1, Theorem 7.19] も参照されたい．次の定理では，さらに埋め込まれた空間の Hausdorff 収束も実現する．

定理 2.8. $\mathcal{M}$ の任意の *Cauchy* 列 $\{(X_j, d_j)\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は，コンパクト距離空間 (Z, h) への等長埋め込みを持ち，その像は *Hausdorff* 距離で空でないコンパクト部分集合へ収束する．その *Gromov–Hausdorff* 極限が (X, d) ならば，(X, d) も同じ周囲の空間に埋め込める．これらの空間を像と同一視すると，次を得る．

$$\mathcal{H}[h](X_j, X) \longrightarrow 0.$$

証明．定理 2.7 により極限を (X, d) とし，次のようにおく．

$$\varepsilon_j = \mathcal{GH}((X_j, d_j), (X, d)) + 2^{-j}.$$

定理 2.3 and 補題 2.4 を用い，共通の X に沿って貼り合わせると [57, author's manuscript, Theorem 27.2]，X とすべての X_j の和集合上に，それぞれの距離を拡張して次を満たす距離 h を得る．

$$\mathcal{H}[h](X_j, X) \leq \varepsilon_j \longrightarrow 0.$$

任意の $\eta > 0$ に対し，列の末尾は X の $\eta/2$-近傍に含まれる．X の有限 $\eta/2$-ネットと，残る有限個の空間の有限 η-ネットを合わせると，和集合の有限 η-ネットが得られる．したがって，この和集合の完備化はコンパクトであり，上記の Hausdorff 距離の評価も保たれる． □

関数族に用いるコンパクト性の判定条件も述べておく．

定理 2.9 (Arzelà–Ascoli, [44, Theorem 6.26])**.** (X, d) を空でないコンパクト距離空間，(Y, e) を完備距離空間とする．連続写像全体の集合 $C(X, Y)$ に，次の一様距離を入れる．

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} e(f(x), g(x)).$$

このとき，族 $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ の閉包がコンパクトであることと，その像の和集合 $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(X)$ が全有界であり，族 $\mathcal{F}$ が同程度連続であることは同値である．ここで同程度連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\eta > 0$ が存在し，任意の $f \in \mathcal{F}$ と，$d(x,y) < \eta$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対し，次が成り立つことをいう．

$$e(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

引用した定理は，一様距離での全有界性を特徴づける．値域 (Y,e) の完備性により，一様距離 d_∞ を入れた関数空間 $C(X,Y)$ も完備となるので，上記のコンパクトな閉包による定式化が得られる．

2.2. **擬距離と距離商.** 相異なる点を同一視する場合にも適用できる評価を示す．

[54, arXiv v1, Example 6.29] により，直径は $\mathcal{M}$ 上で連続である．同文献では，任意の空でないコンパクト距離空間 (X,d) と (Y,e) に対し，次を示している．

$$|\mathrm{diam}(X,d) - \mathrm{diam}(Y,e)| \leq 2\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)).$$

コンパクト空間 X 上の連続擬距離 q は，以下の同値関係を定める．$x, y \in X$ に対し，$q(x,y) = 0$ のとき $x \sim_q y$ と書く．その距離商は次である．

$$[X,q] = (X/\!\sim_q, \overline{q}),$$

ここで，代表元 $x, y \in X$ に対し，商距離は次を満たす．

$$\overline{q}([x],[y]) = q(x,y).$$

この商はコンパクトである．q が距離ならば，商は (X,q) と等長である．同じ集合上の擬距離商と距離の比較については，著者の [28, Proposition 2.12] を参照されたい．以下では，二つの距離商も比較できる，対応による形を用いる．

命題 2.10. X と Y を空でないコンパクト空間，$R \subset X \times Y$ を対応とする．X 上の連続擬距離 q と Y 上の連続擬距離 r に対し，次のようにおく．

$$\Delta_R(q,r) = \sup_{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in R} |q(x_0,x_1) - r(y_0,y_1)|. \tag{2.2}$$

(Q1) 商空間は次を満たす．

$$\mathcal{GH}([X,q],[Y,r]) \leq \tfrac{1}{2}\Delta_R(q,r). \tag{2.3}$$

(Q2) q_0, q_1 が X 上の連続擬距離，r_0, r_1 が Y 上の連続擬距離ならば，次が成り立つ．

$$\big|\|q_0 - q_1\|_\infty - \|r_0 - r_1\|_\infty\big| \leq \Delta_R(q_0,r_0) + \Delta_R(q_1,r_1). \tag{2.4}$$

(Q3) 擬距離が (Q2) の仮定を満たし，$t \in [0,1]$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\Delta_R((1-t)q_0 + tq_1, (1-t)r_0 + tr_1) \leq (1-t)\Delta_R(q_0,r_0) + t\Delta_R(q_1,r_1). \tag{2.5}$$

(Q4) 空でないコンパクト空間 X 上の連続擬距離 q_0, q_1 に対し，次が成り立つ．

$$\mathcal{GH}([X,q_0],[X,q_1]) \le \tfrac{1}{2}\|q_0 - q_1\|_\infty. \tag{2.6}$$

証明. **(Q1) の証明．対応による評価．** $\pi_X\colon X \to X/\!\sim_q$ と $\pi_Y\colon Y \to Y/\!\sim_r$ を商写像とする．両方の商写像と R の両方の座標射影が全射なので，次の集合は対応となる．

$$\{(\pi_X(x), \pi_Y(y)) \mid (x,y) \in R\} \tag{2.7}$$

(2.7)の対応の二つの元に対し，定義(2.2)より次が成り立つ．

$$|q(x_0,x_1) - r(y_0,y_1)| \le \Delta_R(q,r). \tag{2.8}$$

(2.8)に定理 2.3 を適用すると，(2.3)を得る．

(Q2) の証明．一様比較． $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in R$ を固定する．実数直線上の三角不等式より，次が成り立つ．

$$|q_0(x_0,x_1) - q_1(x_0,x_1)| \le |r_0(y_0,y_1) - r_1(y_0,y_1)| + \Delta_R(q_0,r_0) + \Delta_R(q_1,r_1). \tag{2.9}$$

$X \times X$ の各対には，$Y \times Y$ の対応する対が存在する．(2.9)の上限を取ると，次を得る．

$$\|q_0 - q_1\|_\infty \le \|r_0 - r_1\|_\infty + \Delta_R(q_0,r_0) + \Delta_R(q_1,r_1). \tag{2.10}$$

台集合を交換して(2.10)を適用すると，(2.4)が従う．

(Q3) の証明．補間． $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in R$ を固定する．これらの対での補間された擬距離の差は，次である．

$$(1-t)\big(q_0(x_0,x_1) - r_0(y_0,y_1)\big) + t\big(q_1(x_0,x_1) - r_1(y_0,y_1)\big). \tag{2.11}$$

両方の重みが非負なので，(2.11)の絶対値は，二つの誤差の重み付き和で抑えられる．上限を取り，(2.2)を用いると，(2.5)を得る．

(Q4) の証明．共通の台集合． $R = \{(x,x) \mid x \in X\}$ を用いる．(2.2)より，次が成り立つ．

$$\Delta_R(q_0,q_1) = \|q_0 - q_1\|_\infty. \tag{2.12}$$

(2.12)を(2.3)に代入すると，(2.6)を得る． □

2.3. **確率測度と弱収束．** 確率測度の平均と，変動するコンパクト空間上の距離作用素の比較に用いる測度論の道具をまとめる．

距離化可能空間 S について，Borelσ-加法族，すなわち S の開部分集合が生成する σ-加法族を $\mathcal{B}(S)$ で表す．S 上の有限 Borel 測度 μ が *Radon* であるとは，コンパクト集合による内側正則性，すなわち任意の $A \in \mathcal{B}(S)$ に対して次を満たすことをいう．

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A\text{はコンパクト}\}.$$

全質量が 1 の Radon 測度全体を $\mathfrak{Prob}(S)$ で表す．S 上の確率分布とは，$\mathfrak{Prob}(S)$ の元である．Radon 確率測度 $\mu \in \mathfrak{Prob}(S)$ と $\nu \in \mathfrak{Prob}(T)$ に対し，$\mu \otimes \nu$ は $S \times T$ 上の積確率測度を表す．任意の $A \in \mathcal{B}(S)$ と $F \in \mathcal{B}(T)$ に対し，次を満たす．

$$(\mu \otimes \nu)(A \times F) = \mu(A)\nu(F).$$

これらの等式は積確率測度を特徴づける．Radon 確率測度 $\mu \in \mathfrak{Prob}(S)$ の台を次で定める．

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in S \mid \mu(O) > 0\text{任意の開集合}O \subset S\text{，条件：}x \in O\}.$$

$\mathrm{supp}(\mu) = S$ のとき，μ は全台を持つという．同値な条件として，次が成り立つ．

$$\forall O \subset S\text{は開かつ空でない}\quad \mu(O) > 0.$$

$f\colon S \to T$ が連続で $\mu \in \mathfrak{Prob}(S)$ ならば，その押し出しとは，任意の $A \in \mathcal{B}(T)$ に対し次で定まる確率測度 $f_*\mu$ である．

$$(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

空でない距離化可能空間 S について，次のように書く．

$$C_b(S) = \{\varphi\colon S \to \mathbb{R} \mid \varphi\text{は連続かつ有界}\},$$
$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in S} |\varphi(x)|.$$

任意のコンパクト距離空間 X について，次で定める．

$$C(X) = C(X, \mathbb{R}) = \{\varphi\colon X \to \mathbb{R} \mid \varphi\text{は連続}\},$$
$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

これは実 Banach 空間である．$\mathbb{C}$ に値を取る連続関数を考えると，複素 Banach 空間 $C(X, \mathbb{C})$ を得る．

$\mathfrak{Prob}(S)$ に弱位相を入れる．これは，任意の $\varphi \in C_b(S)$ に対し，

$$\mu \longmapsto \int_S \varphi \, d\mu$$

で定まる写像

$$\mathfrak{Prob}(S) \to \mathbb{R}$$

が連続となる最も粗い位相である．任意の $\varphi \in C_b(S)$ に対して次が成り立つとき，$\mu_j \to \mu$ が弱収束すると書く．

$$\int_S \varphi \, d\mu_j \longrightarrow \int_S \varphi \, d\mu.$$

コンパクト空間上の連続関数はすべて有界である．有界な複素数値連続テスト関数についても，実部と虚部に定義を適用すれば，同じ収束が従う．

連続関数の積分値を指定することにより，測度の平均を構成する．Riesz–Markov–Kakutani の定理によると，空でないコンパクト距離空間上の実連続関数に対する正の正規化された線形汎関数は，一意な Radon 確率測度に関する積分で表される．

定理 2.11 (Riesz–Markov–Kakutani, [12, Theorem 7.10.4 and Corollary 7.10.5])．(X, d) を空でないコンパクト距離空間とし，次の線形汎関数を取る．

$$L\colon C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$\varphi \geq 0$ を満たす任意の $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ に対し，次を仮定する．

$$L(\varphi) \geq 0.$$

値 *1* の定値関数を 1 で表し，次を仮定する．

$$L(1) = 1.$$

このとき，一意な *Radon* 確率測度 $\mu \in \mathfrak{Prob}(X)$ が存在し，任意の $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ に対し次が成り立つ．

$$L(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu.$$

正値性と正規化から $|L(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty$ が従うので，汎関数 L は自動的に連続である．引用した表現定理が適用でき，定値関数 1 で評価すると，表現測度 μ の全質量が 1 であるとわかる．

定理 2.12 (Portmanteau, [11, Theorem 2.1], [12, Theorem 8.2.3, Corollary 8.2.4(a)])．S を距離化可能空間とし，$j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $\mu, \mu_j \in \mathfrak{Prob}(S)$ とする．このとき，以下の条件は同値である．

(P1) 任意の $\varphi \in C_b(S)$ に対し，次が成り立つ．

$$\lim_{j\to\infty} \int_S \varphi \, d\mu_j = \int_S \varphi \, d\mu.$$

(P2) 任意の閉部分集合 $F \subset S$ に対し，次が成り立つ．

$$\limsup_{j\to\infty} \mu_j(F) \leq \mu(F).$$

(P3) 任意の開部分集合 $O \subset S$ に対し，次が成り立つ．

$$\mu(O) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_j(O).$$

変動するコンパクト集合上の測度について，以下の帰結も用いる．

補題 2.13. S_j, S をコンパクト距離空間 (Z, h) の空でないコンパクト部分集合とし，$\mathcal{H}[h](S_j, S) \to 0$ とする．$\mathfrak{Prob}(Z)$ 内で $\mu_j \to \mu$ が弱収束し，$\mu_j(S_j) = 1$ ならば，$\mu(S) = 1$ が成り立つ．

証明. 関数 $\varphi\colon Z \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$\varphi(z) = \mathrm{dist}_h(z, S).$$

Z はコンパクトなので，φ は有界かつ連続である．弱収束と $\mu_j(S_j) = 1$ により，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_Z \varphi(z) \, d\mu(z) &= \lim_j \int_Z \varphi(z) \, d\mu_j(z) \\ &\leq \lim_j \mathcal{H}[h](S_j, S) = 0. \end{aligned}$$

$\varphi^{-1}(\{0\}) = S$ なので，$\mu(S) = 1$ を得る． □

(Z, h) をコンパクト距離空間とする．$A \in \mathcal{B}(Z)$ と $\eta > 0$ に対し，次のようにおく．

$$A^\eta = \{x \in Z \mid \mathrm{dist}_h(x, A) < \eta\}.$$

確率測度 $\mu,\nu\in\mathcal{P}\mathrm{rob}(Z)$ の間の *Lévy–Prokhorov* 距離を次で定める．

$$\mathcal{LP}[h](\mu,\nu)=\inf\left\{\eta>0\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{任意の}A\in\mathcal{B}(Z),\\ \mu(A)\le\nu(A^{\eta})+\eta,\\ \nu(A)\le\mu(A^{\eta})+\eta\end{array}\right\}.$$

これは $\mathcal{P}\mathrm{rob}(Z)$ 上の距離であり，弱収束を誘導する [11, Section 6, pp. 72–73, Theorem 6.8], [51, author's manuscript, Definition 1.12, Proposition 1.13 and Lemma 1.15].

補題 2.14 ([37, arXiv v5, Example 2.1(iii)])．(X,d) と (Z,h) をコンパクト距離空間，$\iota\colon(X,d)\to(Z,h)$ を等長埋め込みとする．このとき，任意の $\mu,\nu\in\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ に対し次が成り立つ．

$$\mathcal{LP}[h](\iota_*\mu,\iota_*\nu)=\mathcal{LP}[d](\mu,\nu).$$

Polish 空間上の任意の Borel 確率測度は Radon である [12, Theorem 7.1.7]．Radon 確率測度に対し，以下の定理を用いる．

定理 2.15 ([12, Theorems 8.9.3 and 8.9.4])．S を可分距離化可能空間とする．このとき，$\mathcal{P}\mathrm{rob}(S)$ は弱位相で可分かつ距離化可能である．S が *Polish* ならば，$\mathcal{P}\mathrm{rob}(S)$ も *Polish* である．S がコンパクトならば，$\mathcal{P}\mathrm{rob}(S)$ もコンパクトである．

弱収束は，連続試験関数のコンパクトな族にわたって一様である．

補題 2.16. Z を空でないコンパクト距離空間とし，$\mathcal{P}\mathrm{rob}(Z)$ 内で $\mu_j\to\mu$ が弱収束するとする．$\mathcal{F}\subset C(Z)$ は空でなく，一様ノルムでコンパクトとする．このとき，次が成り立つ．

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\int_Z f\,d\mu_j-\int_Z f\,d\mu\right|\to 0. \tag{2.13}$$

複素連続関数についても同じ結論が成り立つ．

証明. 各 j について，(2.13)の上限を実現する $f_j\in\mathcal{F}$ を選ぶ．$\mathcal{F}$ のコンパクト性により，任意の部分列は，ある $f\in\mathcal{F}$ へ一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$ をさらに持つ．これらの添字について，次が成り立つ．

$$\left|\int_Z f_{n_k}\,d(\mu_{n_k}-\mu)\right|\le 2\|f_{n_k}-f\|_\infty+\left|\int_Z f\,d(\mu_{n_k}-\mu)\right|\longrightarrow 0.$$

したがって，上限の列全体が 0 へ収束する．弱収束は実部と虚部の両方を制御するので，複素関数にも同じ議論を適用できる． □

補題 2.16 を用いて，被積分関数がコンパクトなパラメータについて一様に変動する積分の一様収束を示す．

補題 2.17. K と Z を空でないコンパクト距離空間とし，$\mathcal{P}\mathrm{rob}(Z)$ 内で $\mu_j\to\mu$ が弱収束するとする．$F_j,F\colon K\times Z\to\mathbb{C}$ を実数値または複素数値の連続関数とし，$\|F_j-F\|_\infty\to 0$ を仮定する．このとき，次が成り立つ．

$$\sup_{k\in K}\left|\int_Z F_j(k,z)\,d\mu_j(z)-\int_Z F(k,z)\,d\mu(z)\right|\to 0.$$

証明. 三角不等式により，次を得る．

$$\begin{aligned}&\sup_{k\in K}\left|\int_Z F_j(k,z)\,d\mu_j(z)-\int_Z F(k,z)\,d\mu(z)\right|\\&\le \|F_j-F\|_\infty+\sup_{k\in K}\left|\int_Z F(k,z)\,d\mu_j(z)-\int_Z F(k,z)\,d\mu(z)\right|.\end{aligned}\tag{2.14}$$

仮定により，(2.14)の一様誤差 $\|F_j-F\|_\infty$ は 0 へ収束する．族 $\{F(k,\cdot)\mid k\in K\}$ は一様ノルムでコンパクトなので，補題 2.16 により，(2.14)の右辺の積分の差の上限は 0 へ収束する．(2.14)から，パラメータ付き積分は K 上で一様収束する． □

次の連続関数を用いて，測度の台を調べ，積分によって距離関数を近似する．

補題 2.18. (X,d) を空でないコンパクト距離空間とし，$\mu\in\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ および $r>0$ とする．$x\in X$ に対し，

$$\mathrm{Bump}_{X,d,x,r}\colon X\to[0,1]$$

を次で定める．

$$\mathrm{Bump}_{X,d,x,r}(y)=\max\{1-d(x,y)/r,0\}.\tag{2.15}$$

このとき，任意の $x,x_0,y,y_0\in X$ に対して次が成り立つ．

$$\left|\mathrm{Bump}_{X,d,x,r}(y)-\mathrm{Bump}_{X,d,x_0,r}(y_0)\right|\le\frac{d(x,x_0)+d(y,y_0)}{r}.\tag{2.16}$$

さらに，任意の $x\in X$ に対して次が成り立つ．

$$\frac{1}{2}\mu\big(B(x,r/2;d)\big)\le\int_X\mathrm{Bump}_{X,d,x,r}\,d\mu\le\mu\big(B(x,r;d)\big).\tag{2.17}$$

証明. 関数 $t\mapsto\max\{1-t/r,0\}$ は $1/r$-Lipschitz である．したがって，d の三角不等式から(2.16)が従う．次の各点での評価を積分すると，(2.17)を得る．

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{B(x,r/2;d)}\le\mathrm{Bump}_{X,d,x,r}\le\mathbf{1}_{B(x,r;d)}$$

□

補題 2.19. (X,d) を空でないコンパクト距離空間，μ を X 上の全台を持つ確率測度とし，$r>0$ とする．このとき，任意の $x\in X$ に対し，次の関数は矛盾なく定まり，連続であり，続く三つの条件を満たす．

$$\mathrm{NB}^{\mu}_{X,d,x,r}=\frac{\mathrm{Bump}_{X,d,x,r/2}}{\displaystyle\int_X\mathrm{Bump}_{X,d,x,r/2}\,d\mu}\tag{2.18}$$

$$\mathrm{NB}^{\mu}_{X,d,x,r}\ge 0,\tag{2.19}$$

$$\int_X\mathrm{NB}^{\mu}_{X,d,x,r}\,d\mu=1,\tag{2.20}$$

$$\mathrm{supp}\left(\mathrm{NB}^{\mu}_{X,d,x,r}\right)\subset B(x,r;d).\tag{2.21}$$

証明. $x \in X$ を固定する,$\mathrm{supp}(\mu) = X$ なので,半径 $r/2$ について(2.17)を用いると, (2.18)の分母は正である. 連続性と(2.19)–(2.20)は, (2.16)と(2.18)から従う. (2.15)より，次が成り立つ.

$$\mathrm{supp}\left(\mathrm{NB}^{\mu}_{X,d,x,r}\right) \subset \{y \in X \mid d(x,y) \le r/2\} \subset B(x,r;d).$$

これで(2.21)が示された. □

次の補題では，一方の因子が Dirac 測度である積測度を比較する．この補題は，収束するコンパクト空間の族にわたって確率分布を平均するために用いる.

補題 2.20 ([48, Chapter III, Lemma 1.1]). K をコンパクト距離空間，S を *Polish* 空間とする．K において $k_j \to k$ が成り立ち，$\mathfrak{Prob}(S)$ において $\mu_j \to \mu$ が弱収束の意味で成り立つとする．点 $k \in K$ に対し，k に集中する *Dirac* 測度を δ_k と書く．このとき，次が成り立つ.

$$\delta_{k_j} \otimes \mu_j \longrightarrow \delta_k \otimes \mu \quad \text{弱収束：} \mathfrak{Prob}(K \times S). \tag{2.22}$$

距離測度幾何と比較するため，box 距離も述べておく.

定義 2.21. *mm* 空間とは，Borel 確率測度 μ_X を備えた完備可分距離空間 (X, d_X) である．二つの mm 空間が *mm* 同型であるとは，その台の間に測度を保つ等長写像が存在することをいう．これらの類全体を $\mathcal{X}$ で表す．$I = [0,1)$ とおき，この区間上の Lebesgue 測度を $\mathcal{L}^1$ とする．X のパラメータとは，$(\varphi)_*\mathcal{L}^1 = \mu_X$ を満たす Borel 写像 $\varphi\colon I \to X$ である．任意の mm 空間はパラメータを持つ．*box* 距離 $\square(X,Y)$ は，以下の条件を満たす $\varepsilon > 0$ 全体の下限である．X のパラメータ φ，Y のパラメータ ψ, Borel 集合 $I_0 \subset I$ が存在し，次を満たす.

$$\mathcal{L}^1(I_0) \ge 1 - \varepsilon,$$

さらに，任意の $s, t \in I_0$ に対し次が成り立つ.

$$|d_X(\varphi(s),\varphi(t)) - d_Y(\psi(s),\psi(t))| \le \varepsilon.$$

これは $\mathcal{X}$ 上の距離である．それが誘導する位相を *box* 位相という [36, arXiv v1, Definitions 2.1, 2.6, 2.7 and Theorem 2.8].

2.4. **1 の分割，可縮性，絶対レトラクト.** 1 の分割，連続実関数の拡張定理，可縮性と絶対レトラクトの用語を述べる.

位相空間の部分集合族が局所有限であるとは，各点が，その族の有限個の元とのみ交わる近傍を持つことをいう．ある被覆が別の被覆の細分であるとは，前者の各元が後者のある元に含まれることをいう．Hausdorff 空間がパラコンパクトであるとは，任意の開被覆が局所有限な開細分を持つことをいう.

X を位相空間，I を添字集合とする．$i \in I$ を添字とする連続関数族 $\lambda_i\colon X \to [0,1]$ が局所有限な *1* の分割であるとは，次の台が局所有限族をなし，任意の $x \in X$ に対し以下の等式が成り立つことをいう.

$$\mathrm{supp}\,\lambda_i = \overline{\{x \in X \mid \lambda_i(x) \neq 0\}}$$

$$\sum_{i\in I}\lambda_i(x)=1.$$

各台が開被覆のある元に含まれるとき，その開被覆に従属するという．

定理 2.22 ([16, Theorems 1.3.33 and 1.3.38])．任意の距離化可能空間はパラコンパクトである．距離化可能空間の任意の開被覆に対し，それに従属する局所有限な *1* の分割が存在する．

定理 2.23 (Tietze–Urysohn, [21, Theorem 2.1.8])．S を正規空間, $A\subset S$ を閉部分集合とし,$M\geq 0$ とする.このとき,任意の連続関数 $f\colon A\to[-M,M]$ は連続拡張 $F\colon S\to[-M,M]$ を持つ．

連続写像 $f\colon A\to T$ が零ホモトピックであるとは，点 $p\in T$ と連続写像 $H\colon A\times[0,1]\to T$ が存在し，任意の $a\in A$ に対し次が成り立つことをいう．

$$H(a,0)=f(a),$$
$$H(a,1)=p.$$

空でない空間が可縮であるとは，その恒等写像が零ホモトピックであることをいう．

次の命題は，距離の縮小が可縮ホモトピーを定めることを示す．一点距離空間を $*=(\{0\},0)$ と書く．

命題 2.24. コンパクト距離空間 (X,d) と (Y,e)，実数 $a,b\geq 0$ に対し，次が成り立つ．

$$\mathcal{GH}([X,ad],[Y,be])\leq a\mathcal{GH}((X,d),(Y,e))+\frac{|a-b|}{2}\operatorname{diam}(Y,e). \tag{2.23}$$

したがって，次の写像を以下の式で定めると，連続となり，続く二つの等式を満たす．

$$H\colon \mathcal{M}\times[0,1]\to\mathcal{M}$$
$$H((X,d),t)=[X,(1-t)d]$$
$$H((X,d),0)=(X,d),$$
$$H((X,d),1)=*.$$

この可縮ホモトピーはすべての時刻で一点空間を固定するので，次が成り立つ．

$$H(*,t)=*.$$

特に，$\mathcal{M}$ は可縮である．

証明. 三角不等式と [54, arXiv v1, Examples 6.31 and 6.32] の縮尺に関する恒等式により，縮尺係数の一方が零の場合も含めて(2.23)を得る．直径は $\mathcal{M}$ 上で連続なので，この評価により，$a=0$ も含めて次の写像の連続性が従う．

$$\mathcal{M}\times[0,\infty)\to\mathcal{M},\qquad((X,d),a)\longmapsto[X,ad],$$

H に関する三つの等式は，その定義から直ちに従う． □

Gromov–Hausdorff 空間内の球には，次の別の記号を用いる．

$$\mathcal{B}((X,d),r) = \{(Y,e) \in \mathcal{M} \mid \mathcal{GH}((X,d),(Y,e)) < r\}.$$

対応による公式から，$\mathcal{GH}((X,d),*) = \operatorname{diam}(X,d)/2$ も従う．

位相空間のクラスに対して，拡張性とレトラクト性を述べる．

定義 2.25. $\mathcal{S}$ を位相空間のクラスとする．位相空間 T が$\mathcal{S}$ に対する絶対拡張空間，または $\mathcal{S}$ に対する AE であるとは，任意の空間 $X \in \mathcal{S}$，任意の閉部分集合 $A \subset X$，任意の連続写像 $f\colon A \to T$ に対し，$F|_A = f$ を満たす連続写像 $F\colon X \to T$ が存在することをいう．$\mathcal{S}$ に対する絶対近傍拡張空間，または $\mathcal{S}$ に対する ANE であるとは，任意の空間 $X \in \mathcal{S}$，任意の閉部分集合 $A \subset X$，任意の連続写像 $f\colon A \to T$ に対し，X 内での A の開近傍 U と，$F|_A = f$ を満たす連続写像 $F\colon U \to T$ が存在することをいう．空間 $T \in \mathcal{S}$ が$\mathcal{S}$ に対する絶対レトラクト，または $\mathcal{S}$ に対する AR であるとは，任意の空間 $X \in \mathcal{S}$ と，像が閉である任意の埋め込み $\iota\colon T \to X$ に対し，$r \circ \iota = \mathrm{id}_T$ を満たす連続写像 $r\colon X \to T$ が存在することをいう．空間 $T \in \mathcal{S}$ が$\mathcal{S}$ に対する絶対近傍レトラクト，または $\mathcal{S}$ に対する ANR であるとは，任意の空間 $X \in \mathcal{S}$ と，像が閉である任意の埋め込み $\iota\colon T \to X$ に対し，X 内での $\iota(T)$ の開近傍 U と，$r \circ \iota = \mathrm{id}_T$ を満たす連続写像 $r\colon U \to T$ が存在することをいう．

特に断らない限り，ANR とはすべての距離化可能空間に対する ANR を意味し，AE，ANE，AR についても同じ規約を用いる．これらの用語を限定せずに用いる空間は，距離化可能と仮定する．

定理 2.26 ([20, Theorem 12.1])**.** 距離化可能空間の圏では，距離化可能な値域に対する *AE* 性と *AR* 性は同値であり，*ANE* 性と *ANR* 性も同値である．

定義 2.27. 空間 T が$x \in T$ で局所可縮であるとは，x の任意の開近傍 U に対し，x の開近傍 $V \subset U$ が存在し，包含写像 $V \to U$ が零ホモトピックとなることをいう．

ホモトピーの終点は，値が x である定値写像となるように選べる．実際，ホモトピーを x で評価すると，x から定値写像の値への道が得られる．その逆向きの道を，V の各点のホモトピーによる道の末尾につなげればよい．

第 I 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 I　連続な不変測度

概要. 任意の空でないコンパクト距離空間に，全台を持つ Borel 確率測度を対応させる．この対応は等長写像に関して同変である．共通のコンパクト距離空間内で空間が Hausdorff 距離に関して収束するとき，選択された測度は弱収束する．不変かつ全台を持つ確率測度を備えた測度付きコンパクト空間の部分空間が，Gromov–Hausdorff–Prokhorov 距離について Polish であり，Gromov–Hausdorff 空間への射影が開全射であることを示す．ファイバー上の確率分布を連続的に選択し，それらの分布に関して平均することにより，求める対応を得る．

キーワード. Gromov–Hausdorff 空間,
Gromov–Hausdorff–Prokhorov 距離，不変確率測度，全台性，連続選択.

2020 年数学分野分類. 主分類 54E35，副分類 54C65，60B05，60B10.

3. 第 I 部の序論

空でないコンパクト距離空間の等長類全体に Gromov–Hausdorff 距離 $\mathcal{GH}$ を入れた空間を $\mathcal{M}$ で表す．本論文では，各コンパクト距離空間に対して測度を構成する．この対応は Gromov–Hausdorff 位相に関して連続である．具体的には，空間が共通のコンパクト距離空間へ等長に埋め込まれて Hausdorff 距離で収束するとき，押し出された測度は弱収束する．

Larrieu [40, arXiv v4, Theorem 3] は，空でないコンパクト距離空間上に，開部分集合の間の等長写像に関して不変な Borel 確率測度を構成する方法を述べている．その構成は固定した一般化極限を用いる．引用した結果は，全台性も，台となるコンパクト距離空間が変動するときの連続性も主張していない．Leinster と Roff [41, Theorem 1.1 and Definition 9.2] は，距離エントロピーの族を最大化する確率測度を調べている．距離に無限大へ発散する係数を掛けたとき，十分大きなすべての係数に対して最大化測度が一意であり，その弱極限が存在するという仮定の下で，その極限を一様測度と定める．ここでの問題は，台となるコンパクト空間上の通常の Gromov–Hausdorff 位相と，共通の周囲の空間内での測度の弱収束に関するものである．

主結果である定理 5.9 では，任意の空でないコンパクト距離空間 (X, d) に，全台を持つ Borel 確率測度 $\mathfrak{m}_{X,d}$ を対応させる．すなわち，次が成り立つ．

$$\operatorname{supp}(\mathfrak{m}_{X,d}) = X.$$

任意の等長写像 $u\colon (X, d) \to (Y, e)$ に対し，次が成り立つ．

$$u_*\mathfrak{m}_{X,d} = \mathfrak{m}_{Y,e}.$$

したがって，この対応は等長写像と両立する．この両立性により，コンパクト距離空間の等長類から測度距離空間の等長類への写像が矛盾なく定まる．コンパクト距離空間 (Z, h) のコンパクト部分空間 X_j と X に，そ

れぞれ制限距離 d_j と d を入れると，次が成り立つ．

$$\mathcal{H}[h](X_j, X) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{m}_{X_j,d_j} \to \mathfrak{m}_{X,d} \quad \text{弱収束：} \mathcal{P}\mathrm{rob}(Z).$$

選んだ測度は，共通の周囲空間上の確率測度とみなす．$\mathrm{supp}(\mathfrak{m}_{X,d}) = X$ なので，任意の $1 \le p < \infty$ と $f \in C(X) \setminus \{0\}$ に対し，次が成り立つ．

$$\|f\|^p_{L^p(X,\mathfrak{m}_{X,d})} = \int_X |f(x)|^p \, d\mathfrak{m}_{X,d}(x) > 0.$$

等長写像との両立性と弱連続性により，コンパクト空間が変化するときに，対応する積分を比較できる．

固定したコンパクト距離空間上で，全台を持つ不変確率測度を得るには，全台を持つ確率測度をそのコンパクトな等長群上で平均すればよい．Rouyer の結果 [49, arXiv v1, Theorems 2 and 4] により，等長群が自明なコンパクト距離空間は $\mathcal{M}$ で稠密である．したがって，各コンパクト距離空間に一様距離を備えた等長群を対応させる写像は，Gromov–Hausdorff 距離に関して不連続である．そこで，不変確率測度を同時かつ連続的に構成する．確率測度を備えたコンパクト空間の Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間で議論する．この空間では，測度の台が小さい場合にも，台となるコンパクト空間全体を保持する．不変かつ全台を持つ測度付き空間の部分空間を $\mathcal{I}$ で表す．$\mathcal{I}$ が Polish であり，以下の忘却写像が連続開全射であることを示す．

$$\mathsf{p} \colon \mathcal{I} \to \mathcal{M}, \qquad \mathsf{p}(X, d, \mu) = (X, d),$$

Banakh と Radul の定理 [8, Theorem 1.2, p. 20] および Valov の定理（定理 4.8）により，次を満たす以下の連続写像が存在する．

$$\Sigma \colon \mathcal{M} \to \mathcal{P}\mathrm{rob}(\mathcal{I}),$$

$$\mathsf{p}_* \Sigma(X, d) = \delta_{(X,d)}.$$

コンパクト距離空間 (X, d) を固定する．ファイバー $\mathsf{p}^{-1}((X, d))$ の各点は，(X, d) と等長なコンパクト距離空間と，全台を持つ不変確率測度との組で表せる．その空間から (X, d) への等長写像を選び，測度を X へ押し出す．測度は等長写像に関して不変なので，得られる確率測度は選んだ等長写像に依存しない．また，同じ類の二つの代表元は測度を保つ等長写像で結ばれるので，代表元にも依存しない．Riesz–Markov–Kakutani の定理（定理 2.11）を用い，これらの確率測度を $\Sigma(X, d)$ に関して平均する．共通のコンパクトな周囲の空間内で積分を比較することにより，選択測度の連続性を示す．

確率分布とその平均の定義域は異なる．固定した代表元 (X, d) について，$\mathcal{L}_X = \mathsf{p}^{-1}((X, d))$ とおく．各 $\xi \in \mathcal{L}_X$ に対し，上で述べた方法で X 上へ移した確率測度を $I_{X,\xi}$ とする．X 上の任意の実連続関数 φ に対し，選択測度は次を満たす．

$$\int_X \varphi(x) \, d\mathfrak{m}_{X,d}(x) = \int_{\mathcal{L}_X} \left(\int_X \varphi(x) \, dI_{X,\xi}(x) \right) d\Sigma(X, d)(\xi). \tag{3.1}$$

内側の積分は，固定した台集合上の全台を持つ不変確率測度を用い，外側の積分は，測度付き同型類上の確率分布を用いる．命題 5.8 により，この平均は不変性と全台性を保つ．

応用として,選択測度を付加することにより,$\mathcal{M}$ から Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間への位相的埋め込み s を構成する．忘却写像は s の連続な左逆写像である．像 $s(\mathcal{M})$ が Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間のレトラクトであり，全台を持つ不変確率測度の部分空間に含まれることを示す (系 5.10)．

距離測度空間について，Kazukawa，Nakajima，Shioya [36, arXiv v1, Theorems 1.4–1.6] は，box 位相と集中位相の両方での可縮性と局所弧状連結性を示している．ここで構成する切断とレトラクションは，通常の Gromov–Hausdorff 空間と Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間を結ぶ．

他の部との依存関係. 選択定理とレトラクションは，共通の準備と 4 節で述べる結果を用いて示す．第 II 部では，定理 5.9 を用いて局所モデルを構成する．その後の絶対レトラクト性の議論では，これらの局所モデルを組み合わせる．選択測度は，局所モデルの構成を通じてその議論に用いられる．

構成. 4 節では，この部の準備を述べる．4.1 節では，2.3 節の確率測度に関する準備を用いて Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間を導入し，共通の周囲の空間での実現に関する結果を示す．4.2 節では，Haar 確率測度と Valov の定理を述べる．5.1 節では，全台を持つ不変測度を備えた距離測度空間の空間が Polish であり，測度を持たない Gromov–Hausdorff 空間への射影が開であることを示す．5.2 節では，ファイバー上の連続な確率分布を構成し，それらを平均して定理 5.9 を示す．5.3 節では，選択された測度付き空間全体が Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間のレトラクトであることを示す．

規約と記法. すべてのコンパクト距離空間は空でないとする．距離空間が $\mathcal{M}$ の点を表すとき，その等長類と同一視する．等長写像とは全射等長埋め込みである．距離化可能空間 S 上の Radon 確率測度全体を $\mathcal{P}\mathrm{rob}(S)$ で表し，有界実連続関数に関する弱収束位相を入れる．$\mathfrak{m}_{X,d}$ の添字は，指定された距離空間 (X,d) を表す．共通の周囲の空間に等長埋め込みされた部分集合については，部分集合と制限距離に同じ記号を用いる．列の添字は $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0,1,2,\ldots\}$ とする．

4. 準備

まず，選択の構成に用いる Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間を導入する．次に，Haar 確率測度と，連続な確率分布に関する Valov の定理を述べる．確率測度と弱収束の記法は，2.3 節で定めてある．

4.1. Gromov–Hausdorff–Prokhorov 空間.

2.3 節で述べた確率測度と弱位相を用い，測度付きコンパクト空間の空間上に距離を定める．この段階では，測度は全台を持つ必要はない．

定義 4.1. 測度付きコンパクト距離空間とは，空でないコンパクト距離空間 (X,d) と確率測度 $\mu\in\mathfrak{Prob}(X)$ からなる三つ組 (X,d,μ) である．このような二つの三つ組 (X,d,μ) と (Y,e,ν) に対し，(X,d,μ) から (Y,e,ν) への同型とは，$u_*\mu=\nu$ を満たす等長写像 $u\colon(X,d)\to(Y,e)$ である．

測度付きコンパクト距離空間の同型類全体を $\mathcal{E}$ で表す．

定義 4.2. (X,d,μ) と (Y,e,ν) を $\mathcal{E}$ の二つの元の代表元とする．(Z,h) はコンパクト距離空間全体を動き，$\iota\colon(X,d)\to(Z,h)$ と $\kappa\colon(Y,e)\to(Z,h)$ は等長埋め込み全体を動くものとする．この定義域を持つ二つの等長埋め込みとコンパクト距離空間からなる四つ組 (Z,h,ι,κ) 全体を $\mathcal{S}$ とする．$\mathcal{S}$ 上で下限を取り，*Gromov–Hausdorff–Prokhorov* 距離を次で定める．

$$\begin{aligned}&\mathcal{GHP}((X,d,\mu),(Y,e,\nu))\\&\quad=\inf_{(Z,h,\iota,\kappa)\in\mathcal{S}}\max\{\mathcal{H}[h](\iota(X),\kappa(Y)),\mathcal{LP}[h](\iota_*\mu,\kappa_*\nu)\}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

この非基点付き距離には，最大値を取る規約を用いる．これらの規約は，追加構造を確率測度とする [37, arXiv v5, Example 2.1(iii), Definition 2.4 and equation (8)] と一致する．

測度の選択には，全台を持つ不変確率測度の部分空間を用いる．

定義 4.3. $\mathcal{I}\subset\mathcal{E}$ を，次を満たす三つ組 (X,d,μ) で表される類全体とする．

$$\operatorname{supp}(\mu)=X,\tag{4.2}$$

さらに，任意の $g\in\operatorname{Isom}(X,d)$ に対し次を満たすものとする．

$$g_*\mu=\mu.\tag{4.3}$$

全台を持つ測度について,定義 4.1 の同型は,[36, arXiv v1, Definition 2.1] の通常の mm 同型と一致する．引用した定義は，測度の台を比較する．本論文の定義は，測度の台が小さい場合も含めて，コンパクト空間全体を比較する．したがって，(4.1)の Hausdorff 距離の項は，台の外の点も保持する．

定理 4.4 ([37, arXiv v5, Theorems 2.6 and 2.12 and Example 2.1(iii)])**.** 距離 $\mathcal{GHP}$ によって，$\mathcal{E}$ は完備可分距離空間となる．

次に，収束する列を共通のコンパクトな周囲の空間内で実現する．

補題 4.5. 次を仮定する．

$$\mathcal{GHP}((X_j,d_j,\mu_j),(X,d,\mu))\longrightarrow 0,$$

このとき，コンパクト距離空間 (Z,h) と，次の等長埋め込みが存在し，続く二つの条件を満たす．

$$\begin{gathered}\iota_j\colon(X_j,d_j)\to(Z,h),\\ \iota\colon(X,d)\to(Z,h)\\ \mathcal{H}[h](\iota_j(X_j),\iota(X))\longrightarrow 0,\end{gathered}\tag{4.4}$$

$$(\iota_j)_*\mu_j\longrightarrow\iota_*\mu\quad\text{弱収束：}\mathfrak{Prob}(Z).\tag{4.5}$$

証明. [37, arXiv v5, Lemma 2.5 and Example 2.1(iii)] により，台集合が Hausdorff 距離で収束し，押し出された確率測度が Lévy–Prokhorov 距離で収束する，共通のコンパクトな周囲の空間を得る．コンパクト距離空間上では，Lévy–Prokhorov 距離での収束は弱収束と同値である [51, author's manuscript, Lemma 1.15]．これらは，(4.4)と(4.5)の二つの結論にほかならない． □

4.2. **Haar 確率測度と連続な確率分布.** 等長群上で平均するために Haar 確率測度を用いる．

次の補題により，等長群全体はコンパクトなので，Haar 確率測度の定理を適用できる．

補題 4.6. (X, d) を空でないコンパクト距離空間とする．このとき，一様位相を入れた $\mathrm{Isom}(X, d)$ は，コンパクト距離化可能な位相群である．

証明. $G = \mathrm{Isom}(X, d)$ とおく．$f, g \in C(X, X)$ に対し，一様距離を次で定める．

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

G の各元は等長写像であり，X はコンパクトなので，Arzelà–Ascoli の定理（定理 2.9）により，G の $C(X, X)$ 内での閉包はコンパクトである．

G の元の一様極限 $f \in C(X, X)$ は距離を保ち，[14, Theorem 1.6.14] により全射である．したがって，G は閉かつコンパクトである．$g_j \to g$ と $h_j \to h$ を G 内の二つの収束列とする．次の二つの評価から，合成と逆元を取る操作は連続である．

$$d_\infty(g_j \circ h_j, g \circ h) \le d_\infty(g_j, g) + d_\infty(h_j, h),$$

$$d_\infty(g_j^{-1}, g^{-1}) = d_\infty(g_j, g),$$

したがって，G はコンパクト距離化可能な位相群である． □

定理 4.7 (Haar 確率測度，[19, Theorem 5.14 and Chapter 5, Section 3])**.** 任意のコンパクト距離化可能な位相群 G は，一意な左不変 *Radon* 確率測度 $h \in \mathfrak{Prob}(G)$ を持つ．すなわち，次が成り立つ．

$$h(G) = 1,$$

さらに，任意の $g \in G$ と $A \in \mathcal{B}(G)$ に対し次が成り立つ．

$$h(gA) = h(A).$$

この確率測度は右不変でもあり，全台を持つ．

Valov [56, arXiv v2, pp. 1–2] に従い，距離化可能空間の間の連続全射 $p\colon E \to T$ を考える．連続写像 $\Sigma\colon T \to \mathfrak{Prob}(E)$ で，すべての $t \in T$ に対して

$$p_*\Sigma(t) = \delta_t$$

を満たすものが存在するとき，p を *Milyutin* 写像という．このような Σ を p の選択写像（choice map）という．

Valov の定理 [56, arXiv v2, Theorem 1.1] の以下の帰結を用いる．この定式化における確率測度は Radon 確率測度である．同定理には，台が

コンパクトであるという制限はない．Polish 空間については，Banakh と Radul による先行する定理 [8, Theorem 1.2, p. 20] からも同じ結論が従う．

定理 4.8 (Valov, [56, arXiv v2, Theorem 1.1])．$p\colon E \to T$ を，完備距離化可能空間の間の連続開全射とする．このとき，p は *Milyutin* 写像である．すなわち，連続写像 $\Sigma\colon T \to \mathfrak{Prob}(E)$ が存在し，任意の $t \in T$ に対し $p_*\Sigma(t) = \delta_t$ を満たす．

ここで，δ_t は t における Dirac 確率測度である．Valov の定理は，確率測度上に誘導される写像の連続な右逆写像を与える．この右逆写像と $t \mapsto \delta_t$ を合成すると，上の定式化が得られる．

注意 4.9．定理 4.8 の確率分布は，線形な平均作用素も定める．$T \neq \emptyset$ と仮定し，次の平均作用素を定める．

$$A\colon C_b(E,\mathbb{R}) \to C_b(T,\mathbb{R}).$$

任意の $\varphi \in C_b(E,\mathbb{R})$ と $t \in T$ に対し，次のようにおく．

$$(A\varphi)(t) = \int_E \varphi(\xi)\, d\Sigma(t)(\xi).$$

Σ は弱連続な確率測度族なので，A は正の線形作用素であり，次を満たす．

$$A1 = 1. \tag{4.6}$$

任意の $\varphi \in C_b(E,\mathbb{R})$ に対し，次が成り立つ．

$$\|A\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty. \tag{4.7}$$

ファイバー上の台に関する条件から，任意の $f \in C_b(T,\mathbb{R})$ に対し次が成り立つ．

$$A(f \circ p) = f. \tag{4.8}$$

$p^*\colon C_b(T,\mathbb{R}) \to C_b(E,\mathbb{R})$ を $p^*f = f \circ p$ で定める．(4.6)–(4.8)により，p^*A は $p^*C_b(T,\mathbb{R})$ へのノルム 1 の射影である．

5. 連続な不変確率測度

空でない各コンパクト距離空間上に確率測度を構成する．等長写像が測度を保ち，空でない各開集合の測度が正となり，距離空間の収束から測度の弱収束が従うように選ぶ．最後の条件は，異なる空間上の測度を比較するものである．それぞれを一つのコンパクト距離空間に等長に埋め込んでから比較する．

構成は三段階からなる．まず，全台を持つ不変測度の部分空間 $\mathfrak{I}$ が Polish であることを示す．次に，測度を忘れる写像が開写像であることを示す．最後に，Valov の定理（定理 4.8）を用いて，各ファイバー上に連続な確率分布を得て，その分布が表す測度を平均することにより，求める測度を構成する．

5.1. **測度を持たない空間への開射影.** 次に，測度付き空間の空間 $\mathcal{E}$ を，全台を持つ不変測度に制限し，測度を忘れる写像が開写像であることを示す．積分の一様な制御を用いて，全台性が開条件の可算共通部分で表されることを示す．等長写像の極限を取ることにより，不変性も開条件の可算共通部分で表されることと，コンパクト空間の収束列を持ち上げるために用いる平均測度の弱収束を示す．必要な一様評価は補題 2.16 と 2.17 にある．

次の命題では，コンパクト空間が変動するとき，等長写像のグラフの列から収束部分列を取る．写像 $f\colon X \to Y$ のグラフには次の記号を用いる．

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

命題 5.1. $X_j, X \subset Z$ をコンパクト距離空間 (Z, h) の空でないコンパクト部分集合とし，$\mathcal{H}[h](X_j, X) \to 0$ とする．Z の各部分集合には周囲の距離の制限を入れ，積 $Z \times Z$ には最大値積距離を入れる．各 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，等長写像 $g_j\colon X_j \to X_j$ を取る．このとき，非負整数の狭義増加列 $(j_k)_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と等長写像 $g\colon X \to X$ が存在し，$k \to \infty$ のとき $\mathcal{K}(Z \times Z)$ において

$$\mathrm{graph}(g_{j_k}) \longrightarrow \mathrm{graph}(g)$$

が成り立つ．さらに，$\lambda_{j_k} \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X_{j_k})$ が Z 上の確率測度として $\lambda \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ に弱収束するならば，$k \to \infty$ のとき $\mathcal{P}\mathrm{rob}(Z)$ において

$$(g_{j_k})_*\lambda_{j_k} \longrightarrow g_*\lambda$$

が弱収束の意味で成り立つ．

証明. まずグラフの極限を定め，次にそれらの上に台を持つ確率測度の極限を定める．任意の $x_0, y_0, x_1, y_1 \in Z$ に対し，次のように書く．

$$h_\times((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \max\{h(x_0, x_1), h(y_0, y_1)\}.$$

各 j について，$R_j = \mathrm{graph}(g_j)$ とおく．$\mathcal{K}(Z \times Z)$ はコンパクトなので，狭義増加する添字列 $j_0 < j_1 < \cdots$ と空でないコンパクト集合 $R \subset Z \times Z$ を，次の収束が成り立つように選べる．

$$\mathcal{H}[h_\times](R_{j_k}, R) \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

段階 1．極限のグラフ． $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2\colon Z \times Z \to Z$ を座標射影とする．これらは $h_\times$ について 1-Lipschitz であり，各 g_{j_k} が全射なので，$i = 1, 2$ について $\mathrm{pr}_i(R_{j_k}) = X_{j_k}$ が成り立つ．各 $i = 1, 2$ について，$L = 1$ として pr_i に補題 2.2 を適用し，三角不等式と合わせると次を得る．

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[h](\mathrm{pr}_i(R), X) &\leq \mathcal{H}[h](\mathrm{pr}_i(R), \mathrm{pr}_i(R_{j_k})) + \mathcal{H}[h](X_{j_k}, X)\\ &\leq \mathcal{H}[h_\times](R, R_{j_k}) + \mathcal{H}[h](X_{j_k}, X) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

したがって，$\mathrm{pr}_1(R) = \mathrm{pr}_2(R) = X$ が成り立つ．特に，$R \subset X \times X$ である．

$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in R$ を固定する．各 $i \in \{0, 1\}$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，距離 $h_\times$ による (x_i, y_i) からの距離が最小となる対 $(x_{i,k}, y_{i,k}) \in R_{j_k}$ を選ぶ．

R_{j_k} は空でなくコンパクトなので，このような対は存在する．(5.1)により，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\max\{h(x_{i,k},x_i),h(y_{i,k},y_i)\} &= \operatorname{dist}_{h_\times}((x_i,y_i),R_{j_k})\\ &\le \mathcal{H}[h_\times](R_{j_k},R)\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

したがって，$x_{i,k}\to x_i$ と $y_{i,k}\to y_i$ が成り立つ．$y_{i,k}=g_{j_k}(x_{i,k})$ なので，次を得る．

$$\begin{aligned}h(x_0,x_1) &= \lim_k h(x_{0,k},x_{1,k})\\ &= \lim_k h(g_{j_k}(x_{0,k}),g_{j_k}(x_{1,k}))\\ &= \lim_k h(y_{0,k},y_{1,k}) = h(y_0,y_1).\end{aligned}\tag{5.2}$$

特に，$(x,y_0),(x,y_1)\in R$ ならば $h(y_0,y_1)=0$ となる．よって，$y_0=y_1$ である．第一射影は全射で，各第一座標に対応する第二座標は一意である．したがって，$R=\operatorname{graph}(g)$ を満たす写像 $g\colon X\to X$ が一意に存在する．第二射影も全射なので $g(X)=X$ となり，任意の $x_0,x_1\in X$ について，(5.2)から次が従う．

$$h(g(x_0),g(x_1))=h(x_0,x_1).$$

したがって，g は等長写像である．

段階 2．グラフ上の確率測度． 各 $k\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ に対し，次の写像を定める．

$$G_k\colon X_{j_k}\to Z\times Z$$
$$G_k(x)=(x,g_{j_k}(x)).$$

極限空間についても同様に，次の写像を定める．

$$G\colon X\to Z\times Z$$
$$G(x)=(x,g(x)).$$

次のようにおく．

$$\eta_k=(G_k)_*\lambda_{j_k}.$$

$\mathfrak{Prob}(Z\times Z)$ はコンパクトなので，$(\eta_k)_{k\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$ の任意の部分列は弱収束する部分列を持つ．$(\eta_k)_{k\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$ の弱収束する部分列 $(\eta_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$ を任意に取り，その極限を $\eta\in\mathfrak{Prob}(Z\times Z)$ と書く．すなわち，

$$\eta_{k_\ell}\longrightarrow\eta$$

が $\mathfrak{Prob}(Z\times Z)$ における弱収束の意味で成り立つ．$m_\ell=j_{k_\ell}$ とおく．$\eta_{k_\ell}(R_{m_\ell})=1$ なので，(5.1)，補題 2.13，第一射影 pr_1 の連続性から，次の二つの等式を得る．

$$\eta(R)=1,\tag{5.3}$$
$$(\mathrm{pr}_1)_*\eta=\lim_{\ell\to\infty}(\mathrm{pr}_1)_*\eta_{k_\ell}=\lim_{\ell\to\infty}\lambda_{m_\ell}=\lambda.$$

R 上では，次が成り立つ．

$$G\circ\mathrm{pr}_1=\mathrm{id}_R\,.\tag{5.4}$$

η を R 上の確率測度とみなす．(5.4)により，次を得る．

$$\eta=(G\circ\mathrm{pr}_1)_*\eta=G_*\big((\mathrm{pr}_1)_*\eta\big)=G_*\lambda.$$

弱収束する任意の部分列は同じ極限を持つ．したがって，$\mathfrak{Prob}(Z\times Z)$ のコンパクト性から，列全体について次の弱収束が成り立つ．

$$\eta_k \longrightarrow G_*\lambda.$$

連続な第二射影 pr_2 を適用すると，次を得る．

$$(g_{j_k})_*\lambda_{j_k} = (\mathrm{pr}_2)_*\eta_k \longrightarrow (\mathrm{pr}_2)_*(G_*\lambda) = g_*\lambda.$$

これが求める Z 上の弱収束である． □

命題 5.2. 次の部分集合は，$\mathcal{E}$ の G_δ 部分集合である．

$$\mathcal{S}_{\mathrm{full}} = \{(X,d,\mu)\in\mathcal{E} \mid \mathrm{supp}(\mu) = X\}$$

証明．$(X,d)\in\mathcal{M}$，$\mu\in\mathfrak{Prob}(X)$，$r>0$ に対し，各 $x\in X$ での球の質量関数を次の写像として以下の式で定める．

$$\alpha_r\colon X\to[0,1]$$

$$\alpha_r(x) = \int_X \mathrm{Bump}_{X,d,x,r}\,d\mu, \tag{5.5}$$

さらに，次の写像を続く式で定める．

$$m_r\colon \mathcal{E}\to[0,1]$$

$$m_r(X,d,\mu) = \min_{x\in X}\alpha_r(x). \tag{5.6}$$

(2.16)により，関数 α_r は $1/r$-Lipschitz なので，その最小値は存在する．m_r の連続性を確かめるため，(X_j,d_j,μ_j) が $\mathcal{E}$ 内で (X,d,μ) へ収束するとする．補題 4.5 を用い，台集合を (Z,h) 内で Hausdorff 収束するように実現し，Z 上で $\mu_j\to\mu$ が弱収束するようにする．周囲の空間のバンプ関数を，各台集合上に台を持つ測度に関して積分することにより，球の質量関数を周囲の空間へ拡張する．任意の $z\in Z$ に対し，次で定める．

$$\alpha_{r,j}(z) = \int_Z \mathrm{Bump}_{Z,h,z,r}\,d\mu_j, \tag{5.7}$$

$$\tilde{\alpha}_r(z) = \int_Z \mathrm{Bump}_{Z,h,z,r}\,d\mu. \tag{5.8}$$

$\tilde{\alpha}_r|_X = \alpha_r$ が成り立ち，$\alpha_{r,j}|_{X_j}$ は (X_j,d_j,μ_j) についての(5.5)の球の質量関数である．補題 2.17 と(2.16)により，次が成り立つ．

$$\|\alpha_{r,j} - \tilde{\alpha}_r\|_\infty \longrightarrow 0. \tag{5.9}$$

(5.9)と $1/r$-Lipschitz 評価から，次を得る．

$$|\min_{x\in X_j}\alpha_{r,j}(x) - \min_{x\in X}\tilde{\alpha}_r(x)| \le \|\alpha_{r,j}-\tilde{\alpha}_r\|_\infty + \frac{\mathcal{H}[h](X_j,X)}{r} \longrightarrow 0. \tag{5.10}$$

したがって，m_r は $\mathcal{E}$ 上で連続である．

$\mathrm{supp}(\mu) = X$ ならば，(2.17)により，任意の $x\in X$ に対して次が成り立つ．

$$\alpha_r(x) \ge \tfrac{1}{2}\mu(B(x,r/2;d)) > 0.$$

連続性とコンパクト性から，$m_r(X,d,\mu)>0$ が従う．逆に $x\notin\operatorname{supp}(\mu)$ ならば，$\mu(B(x,r;d))=0$ を満たす $r>0$ を選ぶ．$2^{-k}<r$ を満たす $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を選ぶ．すると $\mu(B(x,2^{-k};d))=0$ であり，$\alpha_{2^{-k}}(x)=0$ となる．これで，$\operatorname{supp}(\mu)=X$ が成り立つための必要十分条件は，任意の $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つことであると分かった．

$$m_{2^{-k}}(X,d,\mu)>0.$$

各 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，部分集合を次で定める．

$$U_k=\{\xi\in\mathcal{E}\mid m_{2^{-k}}(\xi)>0\}.$$

$m_{2^{-k}}$ の連続性により，各 U_k は開集合である．

したがって，次が成り立つ．

$$\mathcal{S}_{\mathrm{full}}=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}U_k.$$

よって，$\mathcal{S}_{\mathrm{full}}$ は $\mathcal{E}$ の開部分集合の可算共通部分であり，求める結論を得る． □

命題 5.3. $\mathcal{S}_{\mathrm{inv}}\subset\mathcal{E}$ を，測度が (X,d) のすべての等長写像に関して不変な類 (X,d,μ) 全体とする．このとき，$\mathcal{S}_{\mathrm{inv}}$ は $\mathcal{E}$ の G_δ 部分集合である．

証明. $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し，次で定める．

$$\mathcal{F}_k=\Big\{\xi=(X,d,\mu)\in\mathcal{E}\;\Big|\;\exists g\in\operatorname{Isom}(X,d)\\ \mathcal{LP}[d](\mu,g_*\mu)\geq 2^{-k}\Big\}.$$

$\mathcal{F}_k$ が閉であることを示す．$\xi=(X,d,\mu)\in\mathcal{E}$ へ収束する次の列を取る．

$$\xi_j=(X_j,d_j,\mu_j)\in\mathcal{F}_k$$

各 j について，次を満たす $g_j\in\operatorname{Isom}(X_j,d_j)$ を選ぶ．

$$\mathcal{LP}[d_j](\mu_j,(g_j)_*\mu_j)\geq 2^{-k}.$$

補題 4.5 により，コンパクト距離空間 (Z,h) と，等長埋め込み $\iota_j\colon(X_j,d_j)\to(Z,h)$，$\iota\colon(X,d)\to(Z,h)$ が存在し，次を満たす．

$$\mathcal{H}[h](\iota_j(X_j),\iota(X))\to 0,$$

$$(\iota_j)_*\mu_j\to\iota_*\mu\quad\text{弱収束：}\mathfrak{Prob}(Z).$$

台集合をこれらの像と同一視し，測度をこれらの押し出しと同一視する．各 j について，埋め込まれた台集合上では，共役 $\iota_j\circ g_j\circ\iota_j^{-1}$ を g_j で表す．命題 5.1 により，狭義増加する添字列 n_ℓ と等長写像 $g\in\operatorname{Isom}(X,d)$ が存在し，次が成り立つ．

$$(g_{n_\ell})_*\mu_{n_\ell}\to g_*\mu\quad\text{弱収束.}$$

補題 2.14 により，等長埋め込みは Lévy–Prokhorov 距離を保つ．したがって，$\mathfrak{Prob}(Z)$ 上の三角不等式から次を得る．

$$\begin{aligned}&|\mathcal{LP}[d_{n_\ell}](\mu_{n_\ell},(g_{n_\ell})_*\mu_{n_\ell})-\mathcal{LP}[d](\mu,g_*\mu)|\\&\quad=|\mathcal{LP}[h](\mu_{n_\ell},(g_{n_\ell})_*\mu_{n_\ell})-\mathcal{LP}[h](\mu,g_*\mu)|\\&\quad\le\mathcal{LP}[h](\mu_{n_\ell},\mu)+\mathcal{LP}[h]((g_{n_\ell})_*\mu_{n_\ell},g_*\mu)\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

$\mathfrak{Prob}(Z)$ 内で $\mu_{n_\ell}\to\mu$ と $(g_{n_\ell})_*\mu_{n_\ell}\to g_*\mu$ が弱収束し，$\mathcal{LP}[h]$ が弱収束を誘導するので，右辺の両項は 0 へ収束する．したがって，次が成り立つ．

$$\mathcal{LP}[d](\mu,g_*\mu)=\lim_{\ell\to\infty}\mathcal{LP}[d_{n_\ell}](\mu_{n_\ell},(g_{n_\ell})_*\mu_{n_\ell})\ge 2^{-k}.$$

よって $\xi\in\mathcal{F}_k$ となり，$\mathcal{F}_k$ は閉である．Lévy–Prokhorov 距離は距離なので，次が成り立つ．

$$\mathcal{S}_{\mathrm{inv}}=\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_k).$$

この共通部分の各集合は開である． □

定理 5.4. 空間 $\mathcal{I}$ は *Polish* である．

証明. 命題 5.2 と 5.3 により，次の集合は $\mathcal{E}$ の G_δ 部分集合である．

$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_{\mathrm{full}}\cap\mathcal{S}_{\mathrm{inv}}$$

定理 4.4 により $\mathcal{E}$ は Polish なので，この部分空間も Polish である． □

次の写像を続く式で定める．

$$\mathsf{p}\colon\mathcal{I}\to\mathcal{M}$$

$$\mathsf{p}(X,d,\mu)=(X,d).$$

すなわち，この写像は測度を忘れる．

補題 5.5. 任意の空でないコンパクト距離空間 (X,d) は，全台を持つ不変確率測度を持つ．

証明. X 内の稠密な列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ を固定し，次のようにおく．

$$\lambda=\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}2^{-(k+1)}\delta_{x_k}.$$

$\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}2^{-(k+1)}=1$ なので，これは X 上の確率測度である．$\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ の稠密性により，$\mathrm{supp}(\lambda)=X$ が成り立つ．

$G=\mathrm{Isom}(X,d)$ とおく．補題 4.6 により，群 G はコンパクトかつ距離化可能である．Haar の定理（定理 4.7）により，G 上の正規化された左不変確率測度 h_G を得る．以下の反復積分では，外側の変数 $g\in G$ を h_G に関して積分し，内側の変数 $x\in X$ を λ に関して積分する．平均 $\overline{\lambda}$ を，任意の $\varphi\in C(X)$ に対して次が成り立つように定める．

$$\int_X\varphi\,d\overline{\lambda}=\int_G\int_X\varphi(gx)\,d\lambda(x)\,dh_G(g).$$

Riesz–Markov–Kakutani の定理（定理 2.11）により，この正の正規化された線形汎関数は，X 上の一意な確率測度を表現する．h_G の左不変性から，任意の $a \in G$ に対し $a_*\overline{\lambda} = \overline{\lambda}$ が従う．任意の空でない開集合 $O \subset X$ について，O の外で零となる非零連続関数 $\varphi\colon X \to [0,1]$ を選ぶ．各 $g \in G$ について，関数 $\varphi \circ g$ は非零かつ非負なので，全台を持つ測度 λ に関する積分は正である．したがって，平均を定める等式から次が従う．

$$\overline{\lambda}(O) \geq \int_G \int_X \varphi(gx)\, d\lambda(x)\, dh_G(g) > 0.$$

よって $(X, d, \overline{\lambda}) \in \mathfrak{I}$ となり，求める結論を得る． □

命題 5.6. $\xi = (X, d, \mu) \in \mathfrak{I}$ とし，$\mathfrak{M}$ 内で $(X_j, d_j) \to (X, d)$ と仮定する．このとき，X_j 上に全台を持つ不変確率測度 ν_j が存在し，次が成り立つ．

$$(X_j, d_j, \nu_j) \longrightarrow \xi \quad \text{空間：} \mathfrak{I}.$$

証明．定理 2.8 により，コンパクトな (Z, h) への等長埋込みを選び，各空間をその像と同一視する．包含写像を $\iota_j\colon X_j \hookrightarrow Z$ および $\iota\colon X \hookrightarrow Z$ とする．確率測度関手の Hausdorff 連続性 [37, arXiv v5, Lemma 2.13 and Example 2.1(iii)] から，Z 上で次の弱収束を満たす確率測度 $\mu_j \in \mathfrak{Prob}(X_j)$ が存在する．$(\iota_j)_*\mu_j \to \iota_*\mu$ $\mathfrak{Prob}(Z)$ において，$\bar{\mu}_j = (\iota_j)_*\mu_j$ および $\bar{\mu} = \iota_*\mu$ を定める．すると $\mathfrak{Prob}(Z)$ において，$\bar{\mu}_j \to \bar{\mu}$ が弱収束の意味で成り立つ．各 X_j 上で全台を持つ確率測度 θ_j を選ぶ．例えば，稠密列の各項に，和が 1 となる正の重みを割り当てればよい．$t_j \to 0$ を満たす $0 < t_j < 1$ に対し，次のようにおく．

$$\lambda_j = (1 - t_j)\mu_j + t_j\theta_j.$$

この確率測度は全台を持つ．Z 上の任意の実数値連続関数 φ に対し，次が成り立つ．

$$\left| \int_{X_j} (\varphi \circ \iota_j)\, d\lambda_j - \int_{X_j} (\varphi \circ \iota_j)\, d\mu_j \right| \leq 2t_j \|\varphi\|_\infty \longrightarrow 0.$$

よって，次の弱収束が成り立つ．$(\iota_j)_*\lambda_j \to \bar{\mu}$

λ_j を $G_j = \mathrm{Isom}(X_j, d_j)$ 上の正規化 Haar 確率測度に関して平均し，得られる確率測度を ν_j とする．補題 5.5 の平均の構成により，これらの確率測度は不変かつ全台を持つ．各 $\varphi \in C(Z)$ について，次を示す．

$$\sup_{g \in G_j} \left| \int_{X_j} (\varphi \circ \iota_j)\, d(g_*\lambda_j) - \int_X (\varphi \circ \iota)\, d\mu \right| \longrightarrow 0. \tag{5.11}$$

背理法のため，(5.11)が成り立たないと仮定する．$\varepsilon > 0$ と狭義増加する添字列 $\{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を選び，各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，次を満たす $g_{n_k} \in G_{n_k}$ を選ぶ．

$$\left| \int_{X_{n_k}} (\varphi \circ \iota_{n_k})\, d((g_{n_k})_*\lambda_{n_k}) - \int_X (\varphi \circ \iota)\, d\mu \right| \geq \varepsilon. \tag{5.12}$$

命題 5.1 により，狭義増加する添字列 $\{k(j)\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と等長写像 $g \in \mathrm{Isom}(X,d)$ が存在し，次が成り立つ．

$$(\iota_{n_{k(j)}} \circ g_{n_{k(j)}})_* \lambda_{n_{k(j)}} \to (\iota \circ g)_* \mu = \bar{\mu}.$$

この弱収束を，固定した関数 $\varphi \in C(Z)$ に適用する．押し出しに関する積分の等式により，次が成り立つ．

$$\left| \int_{X_{n_{k(j)}}} (\varphi \circ \iota_{n_{k(j)}})\, d((g_{n_{k(j)}})_* \lambda_{n_{k(j)}}) - \int_X (\varphi \circ \iota)\, d\mu \right| \longrightarrow 0.$$

これは(5.12)の下界 $\varepsilon > 0$ に矛盾する．したがって，(5.11)を G_j 上で平均すると，$(\iota_j)_* \nu_j \to \bar{\mu}$ の弱収束を得る．次で定める．

$$\xi_j := (X_j, d_j, \nu_j).$$

すると，次の二つの式が成り立つ．

$$\xi_j \longrightarrow \xi,$$
$$\mathsf{p}(\xi_j) = (X_j, d_j).$$

よって，$\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が求める不変な持ち上げの列である．これで証明を終える． □

定理 5.7. 次の写像を続く式で定めると，連続開全射となる．

$$\mathsf{p} \colon \mathcal{I} \to \mathcal{M}$$
$$\mathsf{p}(X,d,\mu) = (X,d),$$

証明. 次の不等式により，p は連続である．

$$\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)) \leq \mathcal{GHP}((X,d,\mu),(Y,e,\nu))$$

補題 5.5 により，写像 p は全射である．開性を示すため，$O \subset \mathcal{I}$ を開集合とし，$\xi \in O$ を取る．背理法のため，$\mathsf{p}(O)$ が $\mathsf{p}(\xi)$ の近傍を含まないと仮定する．各 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，次を選ぶ．

$$(X_j, d_j) \in \mathcal{B}(\mathsf{p}(\xi), 2^{-j}) \setminus \mathsf{p}(O).$$

命題 5.6 により，$\xi_j \in \mathcal{I}$ が存在し，次を満たす．

$$\mathsf{p}(\xi_j) = (X_j, d_j),$$
$$\xi_j \to \xi.$$

O は ξ の開近傍なので，十分大きなすべての j について $\xi_j \in O$ となる．これは $(X_j, d_j) \in \mathsf{p}(O)$ を意味し，矛盾する．したがって，$\mathsf{p}(O)$ は開写像である． □

5.2. **連続な確率分布とその平均.** 忘却写像のファイバー上で確率分布を選択し，それらの分布に関して不変測度を平均する.

命題 5.8 の平均写像は，確率測度の空間上の標準的な重心写像である. その構成と弱連続性は，[12, proof of Theorem 8.10.5, p. 218] にある. ここでは，Riesz–Markov–Kakutani の定理（定理 2.11）による証明を，以下で必要となる全台性と不変性とともに記す. 次に，共通のコンパクトな周囲の空間内で積分を比較し，コンパクト距離空間が変動するときの連続性を示す.

命題 5.8. (X, d) を空でないコンパクト距離空間とする. このとき，次の写像が一意に存在し，任意の $\sigma \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(\mathcal{P}\mathrm{rob}(X))$ と $\varphi \in C(X)$ に対し，続く等式を満たす.

$$\mathrm{bar}_X \colon \mathcal{P}\mathrm{rob}(\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)) \to \mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$$

$$\int_X \varphi \, d \,\mathrm{bar}_X(\sigma) = \int_{\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)} \left(\int_X \varphi \, d\mu \right) d\sigma(\mu). \tag{5.13}$$

この写像は弱位相について連続である. σ が，全台を持つ測度からなる *Borel* 集合に集中しているならば, $\mathrm{bar}_X(\sigma)$ は全台を持つ. 各 $g \in \mathrm{Isom}(X, d)$ について，次を仮定する.

$$\sigma\left(\{\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \,|\, g_*\mu = \mu\}\right) = 1. \tag{5.14}$$

このとき，次が成り立つ.

$$g_* \,\mathrm{bar}_X(\sigma) = \mathrm{bar}_X(\sigma).$$

証明. $\varphi \in C(X)$ に対し，$\widehat{\varphi} \colon \mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \to \mathbb{R}$ を以下のように定める. 任意の $\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ について，次のようにおく.

$$\widehat{\varphi}(\mu) = \int_X \varphi \, d\mu.$$

この関数は連続で，絶対値は $\|\varphi\|_\infty$ で抑えられる. $\sigma \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(\mathcal{P}\mathrm{rob}(X))$ を固定する. これらの関数を積分して，汎関数 $L \colon C(X) \to \mathbb{R}$ を次で定める.

$$L(\varphi) = \int_{\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)} \widehat{\varphi} \, d\sigma.$$

この汎関数は正かつ線形であり, $L(1) = 1$ を満たす. したがって, 定理 2.11 により，(5.13)を満たす表現確率測度を一意に得る. $\mathcal{P}\mathrm{rob}(\mathcal{P}\mathrm{rob}(X))$ 内で $\sigma_j \to \sigma$ が弱収束するならば，任意の $\varphi \in C(X)$ に対し次が成り立つ.

$$\int_{\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)} \widehat{\varphi} \, d\sigma_j \longrightarrow \int_{\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)} \widehat{\varphi} \, d\sigma.$$

よって，重心は弱収束する. 両方の確率測度空間は弱位相で距離化可能なので，これで連続性が示された.

σ が，全台を持つ測度からなる Borel 集合に集中すると仮定する. 空でない開部分集合 $O \subset X$ に対し，非零で O の外で零となる連続関数

$\varphi\colon X \to [0,1]$ を選ぶ．$\mathrm{supp}(\mu) = X$ を満たす任意の $\mu \in \mathfrak{Prob}(X)$ について，$\widehat{\varphi}(\mu) > 0$ が成り立つ．仮定と(5.13)により，次が成り立つ．

$$\mathrm{bar}_X(\sigma)(O) \geq \int_{\mathfrak{Prob}(X)} \widehat{\varphi}(\mu)\, d\sigma(\mu) > 0.$$

これで全台性が示された．

(5.14)を満たす等長写像 $g \in \mathrm{Isom}(X,d)$ を固定する．任意の $\varphi \in C(X)$ と，$g_*\mu = \mu$ を満たす任意の $\mu \in \mathfrak{Prob}(X)$ に対し，次が成り立つ．

$$\int_X \varphi \circ g\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu. \tag{5.15}$$

(5.14)により，(5.15)を σ に関して積分し，(5.13)を用いると，$\mathrm{bar}_X(\sigma)$ の g に関する不変性が従う． □

定理 5.9. 任意の空でないコンパクト距離空間 (X,d) に対し，確率測度 $\mathfrak{m}_{X,d} \in \mathfrak{Prob}(X)$ が存在する．これらの測度は，以下の三つの性質を満たすように同時に選べる．

(M1) 任意の (X,d) に対し，$\mathrm{supp}(\mathfrak{m}_{X,d}) = X$ が成り立つ．

(M2) 空でないコンパクト距離空間の任意の対 (X,d)，(Y,e) と，任意の等長写像 $u\colon (X,d) \to (Y,e)$ に対し，次が成り立つ．

$$u_*\mathfrak{m}_{X,d} = \mathfrak{m}_{Y,e}.$$

(M3) (X_j,d_j) と (X,d) を空でないコンパクト距離空間とする．(Z,h) を任意のコンパクト距離空間とし，$\iota_j\colon (X_j,d_j) \to (Z,h)$ と $\iota\colon (X,d) \to (Z,h)$ を等長埋め込みとする．このとき，次が成り立つ．

$$\mathcal{H}[h](\iota_j(X_j), \iota(X)) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad (\iota_j)_*\mathfrak{m}_{X_j,d_j} \to \iota_*\mathfrak{m}_{X,d} \quad \text{弱収束：} \mathfrak{Prob}(Z).$$

証明．定理 5.4 と 5.7 により，写像 $\mathsf{p}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ は Polish 空間の間の連続開全射である．Valov の定理（定理 4.8）により，p は Milyutin 写像である．p の選択写像 $\Sigma\colon \mathcal{M} \to \mathfrak{Prob}(\mathcal{I})$ を一つ取る．すると，任意の $(X,d) \in \mathcal{M}$ に対し $\mathsf{p}_*\Sigma(X,d) = \delta_{(X,d)}$ が成り立つ．代表元 (X,d) を固定し，次のようにおく．

$$\mathcal{L}_X = \mathsf{p}^{-1}((X,d)).$$

これは $\mathcal{I}$ の閉 Polish 部分空間であり，$\Sigma(X,d)(\mathcal{L}_X) = 1$ を満たす．固定した台集合上の写像 $I_{X,\bullet}\colon \mathcal{L}_X \to \mathfrak{Prob}(X)$ を以下のように構成する．各類 $\xi \in \mathcal{L}_X$ について，ξ の代表元 (Y,e,ν) と等長写像 $u\colon (Y,e) \to (X,d)$ を選ぶ．この固定した代表元上への押し出し測度を，次で表す．

$$I_{X,\xi} = u_*\nu.$$

任意の $A \in \mathcal{B}(X)$ に対し，これは次を意味する．

$$I_{X,\xi}(A) = \nu(u^{-1}(A)).$$

$I_{X,\bullet}(\xi) = I_{X,\xi}$ とおく．$v\colon (Y,e) \to (X,d)$ が別の等長写像ならば，$v^{-1}u \in \mathrm{Isom}(Y,e)$ が成り立ち，次を得る．

$$u_*\nu = v_*\big((v^{-1}u)_*\nu\big) = v_*\nu.$$

したがって，測度はこの代表元からの等長写像の選択に依存しない．次に，(Y_0, e_0, ν_0) を ξ の別の代表元とする．測度を保つ等長写像 $h\colon (Y, e) \to (Y_0, e_0)$ を，$h_*\nu = \nu_0$ となるように選び，さらに等長写像 $k\colon (Y_0, e_0) \to (X, d)$ を選ぶ．Y 上での移送等長写像に依存しないことから，次が従う．

$$k_*\nu_0 = (k \circ h)_*\nu = u_*\nu.$$

したがって，測度は ξ の代表元にも依存しない．

まず，(M3) の仮定の下で，この測度の対応の連続性を示す．(M3) にあるように，列 $\{(X_j, d_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，空でないコンパクト距離空間 (X, d)，コンパクト距離空間 (Z, h)，指定された等長埋め込み ι_j と ι を固定し，次を仮定する．

$$\mathcal{H}[h](\iota_j(X_j), \iota(X)) \to 0.$$

X_j と X を，Z への等長埋め込みによる像と同一視する．$\xi_j \in \mathcal{L}_{X_j}$ と $\xi \in \mathcal{L}_X$ が $\mathfrak{I}$ 内で $\xi_j \to \xi$ を満たすならば，次が成り立つ．

$$I_{X_j,\xi_j} \longrightarrow I_{X,\xi} \quad \text{弱収束：} \mathfrak{Prob}(Z). \tag{5.16}$$

実際，弱収束する任意の部分列を以下のように書き，その極限を ν とする．

$$\{I_{X_{n_k},\xi_{n_k}}\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}.$$

$\mathfrak{Prob}(Z)$ のコンパクト性により，このような部分列は存在する．補題 2.13 により，極限は X に集中する．$\mathcal{GHP}$ の定義と Z 上の弱収束から，次を得る．

$$\xi_{n_k} \longrightarrow (X, d, \nu).$$

極限の一意性により，$(X, d, \nu) = \xi$ である．したがって，$\nu = g_*I_{X,\xi}$ を満たす等長写像 $g\colon X \to X$ が存在する．測度 $I_{X,\xi}$ は不変なので，次が成り立つ．

$$\nu = I_{X,\xi}. \tag{5.17}$$

$\mathfrak{Prob}(Z)$ のコンパクト性と，(5.17)における部分列極限の一意性から，(5.16)が従う．空間 X を固定すると，これで $I_{X,\bullet}$ の連続性も示される．

ファイバー上の確率分布を $I_{X,\bullet}$ で押し出し，次のように定める．

$$\sigma_X = (I_{X,\bullet})_* \left(\Sigma(X, d)|_{\mathcal{L}_X}\right).$$

命題 5.8 の重心を用いて，次のように定める．

$$\mathfrak{m}_{X,d} = \mathrm{bar}_X(\sigma_X).$$

$L_X\colon C(X) \to \mathbb{R}$ を次のように定める．任意の $\varphi \in C(X)$ に対して，次のようにおく．

$$L_X(\varphi) = \int_{\mathcal{L}_X} \left(\int_X \varphi \, dI_{X,\xi} \right) d\Sigma(X, d)(\xi). \tag{5.18}$$

等式(5.13)の σ に σ_X を代入すると，次を得る．

$$\int_X \varphi \, d\mathfrak{m}_{X,d} = L_X(\varphi). \tag{5.19}$$

図 2 は，この二段階の確率測度を示す．

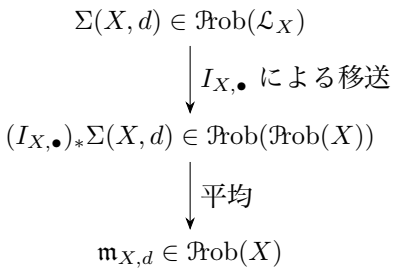


図 2. 代表 (X,d) を固定する．ファイバー $\mathcal{L}_X$ 上の確率分布 $\Sigma(X,d)$ を，$\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ 上の確率分布へ移す．平均化した測度 $\mathfrak{m}_{X,d}$ は，(5.18)と(5.19)で定められる．

コンパクト距離空間 (X,d) に対して，X 上の全台を持つ確率測度全体の集合 $\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{fs}}(X)$ を次で定める．

$$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{fs}}(X) = \{\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \mid \operatorname{supp}\mu = X\}.$$

各 $g \in \mathrm{Isom}(X,d)$ に対して，g に関して不変な確率測度全体の集合 $\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{inv}}(X,g)$ を次で定める．

$$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{inv}}(X,g) = \{\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \mid g_*\mu = \mu\}.$$

確率分布 σ_X は次の集合に集中する．

$$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{fs}}(X) \cap \bigcap_{g\in\mathrm{Isom}(X,d)} \mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{inv}}(X,g).$$

X の可算な基 $\mathcal{B}$ を選ぶ．確率測度 $\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ が全台を持つための必要十分条件は，空でない任意の $O \in \mathcal{B}$ に対して $\mu(O) > 0$ が成り立つことである．$\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ 上の弱位相は距離化可能である．空でない $O \in \mathcal{B}$ を固定し，$\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ 内の列 $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が μ に弱収束するとする．定理 2.12 を適用すると，次を得る．

$$\mu(O) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_j(O).$$

距離化可能空間における下半連続性の点列による判定から，写像

$$\mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \to [0,1], \qquad \mu \mapsto \mu(O)$$

は弱位相に関して下半連続である．0 を真に上回る値を取る点全体は開集合なので，

$$\{\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \mid \mu(O) > 0\}$$

は $\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ で開いている．基による判定から，次が成り立つ．

$$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{fs}}(X) = \bigcap_{\substack{O\in\mathcal{B}\\ O\neq\emptyset}} \{\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \mid \mu(O) > 0\}.$$

基は可算であり，この共通部分を作る各集合は開いているので，$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{fs}}(X)$ は開集合の可算共通部分であり，特に Borel 集合である．次に，各 $g \in$

$\mathrm{Isom}(X,d)$ に対し，$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{inv}}(X,g)$ が $\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ で閉じていることを確かめる．任意の $\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ と $\varphi \in C(X)$ に対し，押し出しは次を満たす．

$$\int_X \varphi \, d(g_*\mu) = \int_X (\varphi \circ g) \, d\mu.$$

g が連続なので，$\varphi \circ g$ は連続である．$\mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ 内の列 $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が μ に弱収束するとする．任意の $\varphi \in C(X)$ に対し，弱収束から次を得る．

$$\int_X \varphi \, d(g_*\mu_j) \longrightarrow \int_X \varphi \, d(g_*\mu).$$

したがって，押し出し写像

$$g_* \colon \mathcal{P}\mathrm{rob}(X) \to \mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$$

は弱位相に関して連続である．今度は $\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{inv}}(X,g)$ 内の列 $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が $\mu \in \mathcal{P}\mathrm{rob}(X)$ に弱収束するとする．連続性と不変性から次が従う．

$$g_*\mu_j = \mu_j \longrightarrow \mu, \qquad g_*\mu_j \longrightarrow g_*\mu.$$

また，弱極限の一意性から $g_*\mu = \mu$ が従う．したがって，$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{inv}}(X,g)$ は点列閉である．弱位相は距離化可能なので，$\mathcal{P}\mathrm{rob}_{\mathrm{inv}}(X,g)$ は閉じている．よって命題 5.8 から，$\mathfrak{m}_{X,d}$ は不変であり，全台を持つことが従う．最後に，等長写像 $u \colon (X,d) \to (Y,e)$ に対し，等長類の次の等式が成り立つ．

$$(X,d) = (Y,e) \quad \text{空間：} \mathcal{M}.$$

したがって，ファイバーは

$$\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y \quad \text{部分集合としての周囲空間：} \mathcal{I},$$

を満たす．また，写像 Σ は GH 等長類上で定義されているので，次が成り立つ．

$$\Sigma(X,d) = \Sigma(Y,e).$$

代表元 (X,d) と (Y,e)，およびその間の等長写像 u を固定する．任意の $\xi \in \mathcal{L}_X$ に対し，移送による定義から次が従う．

$$I_{Y,\xi} = u_* I_{X,\xi}.$$

任意の $\varphi \in C(Y)$ に対し，X 上で(5.18)と(5.19)を $\varphi \circ u$ に適用する．各ファイバー測度についての変数変換の等式から，次が従う．

$$\begin{aligned}
\int_Y \varphi \, d(u_*\mathfrak{m}_{X,d}) &= \int_{\mathcal{L}_X} \left(\int_X \varphi \circ u \, dI_{X,\xi} \right) d\Sigma(X,d)(\xi) \\
&= \int_{\mathcal{L}_Y} \left(\int_Y \varphi \, dI_{Y,\xi} \right) d\Sigma(Y,e)(\xi) \\
&= \int_Y \varphi \, d\mathfrak{m}_{Y,e}.
\end{aligned}$$

表現測度の一意性により，求める等長写像との両立性が従う．

台となる空間が変動するときの連続性を示せばよい．指定された Z への埋め込みを用い，各台集合をその像と同一視する．実連続関数 $\varphi \in C(Z)$

を固定する．固定した空間上の一つの有界連続拡張を用いて，各選択測度に関する φ の積分を表す．

段階 1．ファイバー積分の閉定義域． 次のようにおく．

$$T = \{0\} \cup \{2^{-j} \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

さらに，次のようにおく．

$$C_0 = X.$$

各 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，次のようにおく．

$$C_{2^{-j}} = X_j.$$

すべての台集合には，周囲の距離の制限を入れる．T から $\mathcal{M}$ への写像 $t \mapsto [C_t]$ は連続である．角括弧は制限距離を備えた等長類を表す．したがって，次の集合は距離空間 $\mathcal{M}$ への二つの連続写像の一致集合であり，閉である．

$$A = \{(t, \xi) \in T \times \mathcal{I} \mid \mathsf{p}(\xi) = [C_t]\}$$

関数 $F\colon A \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$F(t, \xi) = \int_{C_t} \varphi \, dI_{C_t, \xi}.$$

パラメータ 0 での連続性は，(5.16)から従う．孤立したパラメータでの連続性は，台集合を固定した(5.16)から従う．また，$|F| \leq \|\varphi\|_\infty$ が成り立つ．

段階 2．拡張と確率分布の弱収束． 積 $T \times \mathcal{I}$ は距離化可能なので正規である．Tietze–Urysohn の定理（定理 2.23）により，F は，$|\widetilde{F}| \leq \|\varphi\|_\infty$ を満たす連続関数 $\widetilde{F}\colon T \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ へ拡張する．次のように書く．

$$\lambda_t = \Sigma([C_t]).$$

Σ の連続性から，$\lambda_{2^{-j}} \to \lambda_0$ が弱収束する．$K = T$，$S = \mathcal{I}$ として補題 2.20 を適用すると，次が従う．

$$\delta_{2^{-j}} \otimes \lambda_{2^{-j}} \longrightarrow \delta_0 \otimes \lambda_0 \quad \text{弱収束，周囲空間：} T \times \mathcal{I}. \tag{5.20}$$

段階 3．平均化した測度による積分． (5.20)の各積測度は A に集中する．ここでは，指定した埋込みを通じて，各選択測度を Z 上の確率測度とみなす．(5.18)と(5.19)により，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\int_Z \varphi(z) \, d\mathfrak{m}_{X_j, d_j}(z) &= \int_{T \times \mathcal{I}} \widetilde{F}(t, \xi) \, d(\delta_{2^{-j}} \otimes \lambda_{2^{-j}})(t, \xi) \\
&\longrightarrow \int_{T \times \mathcal{I}} \widetilde{F}(t, \xi) \, d(\delta_0 \otimes \lambda_0)(t, \xi) \\
&= \int_Z \varphi(z) \, d\mathfrak{m}_{X, d}(z).
\end{aligned}$$

これはコンパクトな周囲空間 Z 上の任意の実数値連続関数 φ について成り立つので，主張どおり，選択測度 $\mathfrak{m}_{X_j, d_j}$ は $\mathfrak{m}_{X, d}$ に弱収束する． □

5.3. **測度付き空間のレトラクト.** ここで，$\mathcal{M}$ を測度付き空間のレトラクトとして実現する．定理 5.9 により，$\mathcal{E}$ から $\mathcal{M}$ への忘却写像の連続切断を得る．

系 5.10.

$$s((X,d)) = (X,d,\mathfrak{m}_{X,d})$$

で定める写像

$$s\colon \mathcal{M} \to \mathcal{E}$$

は位相的埋め込みである．その像は $\mathfrak{I}$ に含まれ，$\mathcal{E}$ のレトラクトである．したがって，$\mathcal{M}$ は *Gromov–Hausdorff–Prokhorov* 空間 $\mathcal{E}$ のレトラクトと同相であり，後者を全台を持つ確率測度，または不変かつ全台を持つ確率測度に制限しても同じ結論が成り立つ．

証明. 測度付き空間全体

$$p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}$$

上の忘却写像を次で定める．

$$p((X,d,\mu)) = (X,d).$$

同型な測度付き空間の台となる空間は等長なので，この写像は矛盾なく定まる．(4.1)により，

$$\mathcal{GH}\big(p((X,d,\mu)), p((Y,e,\nu))\big) \le \mathcal{GHP}((X,d,\mu),(Y,e,\nu)).$$

したがって，p は連続である．定理 5.9 により，s は矛盾なく定まり，その値は $\mathfrak{I}$ に属する．$\{(X_j,d_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ が $\mathcal{M}$ において (X,d) に収束するとする．定理 2.8 により，共通のコンパクト距離空間 (Z,h) 内にコンパクトな代表を取り，それらと X との Hausdorff 距離が 0 に収束するようにできる．定理 5.9 により，

$$\mathfrak{m}_{X_j,d_j} \to \mathfrak{m}_{X,d} \quad \text{弱収束：} \mathcal{P}\mathrm{rob}(Z).$$

Lévy–Prokhorov 距離は弱収束を距離化するので，(4.1)から次を得る．

$$\mathcal{GHP}\big(s(X_j,d_j), s(X,d)\big) \to 0.$$

これで s の連続性が示された．

$p \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ なので，s は位相的埋め込みであり，

$$r = s \circ p\colon \mathcal{E} \to s(\mathcal{M})$$

はレトラクションである．全台を持つ測度の部分空間への制限と $\mathfrak{I}$ への制限も，同じ像へのレトラクションである． □

系 5.10 のレトラクトに関する結論は，定理 11.8 で証明する $\mathcal{M}$ の絶対レトラクト性の特殊な場合である．

第 II 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 II　コンパクト距離空間の局所有限次元近似

概要. Gromov–Hausdorff 位相に関して連続的に変化する，コンパクト距離空間の局所有限次元近似を構成する．任意の空でないコンパクト距離空間の近傍において，任意の正の誤差許容値に対し，固定された有限次元，変化するノルム，および連続な点写像を得る．これらの点写像が誘導する擬距離は，元の距離を一様に近似する．点写像は等長変換群の直交表現に関して同変となるように選ぶ．写像とノルムは，直交座標変換を除いて矛盾なく定まる．連続的に選ばれた不変かつ全台を持つ確率測度を用い，距離作用素の有限次元スペクトル部分空間において，$2 \le p < \infty$ の範囲の L^p ノルムに関する一意な最良近似によって距離関数を近似する．スペクトル部分空間と最小化元の連続性から，局所モデルの連続性を示す．

キーワード. Gromov–Hausdorff 空間，有限次元近似，距離作用素，スペクトル部分空間，最良近似．

2020 年数学主題分類. 主分類 54E35；副分類 47A55，47A58．

6. 第 II 部の序論

コンパクト距離空間を，無限次元関数空間内の距離関数によって表現する．第 I 部の連続的な不変確率測度を用い，等長変換に関して同変で，コンパクト空間とともに連続的に変化する，この表現の有限次元近似を構成する．空でないコンパクト距離空間の等長類の空間を $\mathcal{M}$ で表す．本部の主結果は定理 8.11 である．

入力空間の対称性も近似問題の一部である．Rouyer の結果 [49, arXiv v1, Theorems 2 and 4] から，等長変換群が自明なコンパクト距離空間は $\mathcal{M}$ において稠密であることが従う．近似は，非自明な等長変換を持つ空間においても連続でなければならない．そこで，有限スペクトル部分空間を丸ごと保持し，その正規直交基底の変更を許す．こうして得られる直交作用は，入力の対称性と，入力が変化する際に必要な座標変換の双方を表す．

任意の空でないコンパクト距離空間 (X, d) と任意の $b > 0$ に対し，近傍 $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$ と固定された整数 $n \ge 1$ を構成する．等長類が $\mathcal{W}$ に属する各コンパクト距離空間 (Y, e) に対し，$\mathbb{R}^n$ 上のノルム N_Y と連続写像

$$\mathbf{v}_Y \colon Y \to \mathbb{R}^n.$$

が存在する．$y, z \in Y$ に対し，誘導される擬距離を次で定める．

$$q_Y(y, z) = N_Y(\mathbf{v}_Y(y) - \mathbf{v}_Y(z)).$$

その一様誤差は次で与えられる．

$$\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y, e) = \sup_{y,z \in Y} |q_Y(y, z) - e(y, z)|.$$

関数 $\mathcal{E}\mathrm{rr}$ は $\mathcal{W}$ 上で連続であり，$\mathcal{E}\mathrm{rr}(X, d) < b$ を満たす．$\mathcal{W}$ を縮小すると，すべての $(Y, e) \in \mathcal{W}$ に対して $\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y, e) < b$ が成り立つようにできる．次元と近傍は，中心 (X, d) と許容値 b に依存してよい．この近傍内では，像 $\mathbf{v}_Y(Y)$ は，変化するノルム N_Y を備えた一つの固定されたベクトル空間

のコンパクト部分集合である．また，$\mathbb{R}^n$ 上の距離 $(v,w)\mapsto N_Y(v-w)$ も N_Y で表す．対応 $\{(y,\mathbf{v}_Y(y))\mid y\in Y\}$ の歪みは高々 $\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e)$ である．したがって，定理 2.3 から次を得る．

$$\mathcal{GH}((Y,e),(\mathbf{v}_Y(Y),N_Y))<\frac{b}{2}.$$

ノルムと点写像について，定理 8.11(A4) の連続性の主張をまとめる．$\{(Y_j,e_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を $\mathcal{W}$ 内の列とし，$(Y,e)\in\mathcal{W}$ とする．これらの空間が共通のコンパクトな周囲空間に等長埋め込みされ，その台集合が Hausdorff 距離に関して Y に収束すると仮定する．これらの空間と埋め込みを固定した後，極限空間の座標の組 $(\mathbf{v}_Y,N_Y)$ と，列中の各空間の座標の組 $\{(\mathbf{v}_{Y_j},N_{Y_j})\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を選び，

$$\sup_{\substack{c\in\mathbb{R}^n\\ \|c\|_2=1}}\left|N_{Y_j}(c)-N_Y(c)\right|\to 0,$$

が成り立ち，さらに，共通の周囲空間において $y_j\to y$ を満たす任意の列 $y_j\in Y_j$ と任意の $y\in Y$ に対し，座標値が次を満たすようにできる．

$$\mathbf{v}_{Y_j}(y_j)\to\mathbf{v}_Y(y).$$

各 $g\in O(n)$ に対し，対応する正規直交基底の変更は，この組に次のように作用する．

$$(\mathbf{v}_Y,N_Y)\longmapsto(g\circ\mathbf{v}_Y,N_Y\circ g^{-1}).$$

この作用は，誘導される擬距離を保つ．

写像 $\mathbf{v}_Y$ は，各入力空間の等長変換群の直交表現に関して同変である．注意 8.12 では，同変性を満たし，選んだノルムを保つ連続準同型

$$\rho_{Y,e}\colon \mathrm{Isom}(Y,e)\to O(n)$$

を構成する．任意の $\alpha\in\mathrm{Isom}(Y,e)$ と任意の $y\in Y$ に対し，同変性は次の等式で表される．

$$\mathbf{v}_Y(\alpha y)=\rho_{Y,e}(\alpha)\mathbf{v}_Y(y).$$

任意の $\alpha\in\mathrm{Isom}(Y,e)$ と任意の $c\in\mathbb{R}^n$ に対し，ノルムを保つことは次の等式で表される．

$$N_Y\big(\rho_{Y,e}(\alpha)c\big)=N_Y(c).$$

したがって，モデルを構成した近傍では，入力に応じて変わる等長変換群が，一つの固定された直交群を通じて作用する．入力空間の等長変換群が自明であっても，基底の直交変換は依然として関係する．

まず，本構成の背景となる，幾何におけるスペクトル的方法の二つの例を挙げる．Bates [9, arXiv v1, Theorem 2] は，次元が 2 以上の一定値で体積が 1 の閉連結 Riemann 多様体が，Ricci 曲率の共通の下限と単射半径の共通の正の下限を持つとき，一様に有界な個数の Laplacian の固有関数による滑らかな埋め込みを持つことを示している．Kuwae と Shioya は，変化する Hilbert 空間上の非負自己共役作用素に付随するスペクトル構造を研究している．これらの構造がコンパクト収束するとき，端点が極限のスペクトルの外にある有界区間に対するスペクトル部分空間の次元が，十分先では一致することを証明している [39, Theorem 2.6]．本論文では，任

意のコンパクト距離空間上の距離核を用い，距離を一様に近似する．第 I 部の定理 5.9 で構成した，不変かつ全台を持つ確率測度の連続的な割当てを用いる．(X, d) に付随する距離作用素 $T_{X,d}\colon L^2(X, \mathfrak{m}_{X,d}) \to L^2(X, \mathfrak{m}_{X,d})$ は，自己共役 Hilbert–Schmidt 積分作用素である．任意の $f \in L^2(X, \mathfrak{m}_{X,d})$ と $x \in X$ に対し，その値は次で与えられる．

$$(T_{X,d}f)(x) = \int_X d(x, z)f(z)\, d\mathfrak{m}_{X,d}(z).$$

Maria，Oudot，Solomon は，この作用素とそのスペクトル座標を研究している [42, Section 3]．L^p ノルムを用い，有限スペクトル部分空間における一意な最良近似によって距離関数を近似する．ここで，$2 \le p < \infty$ であり，ノルムは選択した確率測度に関して取る．近似関数間の距離が元の距離を一様に近似するように指数を選ぶ．固有空間を丸ごと保持し，固有値の重複度を基底の直交変換によって扱う．スペクトル部分空間と最良近似の連続性を用い，ノルムと点写像について述べた連続性を証明する．

[31, Theorem 1.1] の補間結果により，固定された距離化可能空間の閉部分集合の離散族上に指定された距離を拡張する際の，一様な誤差評価を得る．ここでは，後の絶対レトラクトの議論のために，定理 8.11 を用いて，変化するコンパクト空間上に写像とノルムを構成する．

他の部への依存． 第 I 部から用いる結果は定理 5.9 である．この割当てと第 7 節の準備を用い，スペクトル近似とその応用を証明する．第 III 部では定理 8.11 を用い，変化するノルムを固定された Banach 空間内で表現して，局所的な点写像を組み合わせる．直交作用は，この構成で用いるコンパクト群を定める．

構成． 第 7 節では，L^p における最良近似，スペクトル分解と摂動，および正定値行列の平方根を振り返る．第 8.1 小節では，距離作用素を定義し，その有限次元スペクトル部分空間を調べる．第 8.2 小節では，有限次元スペクトル部分空間と，$2 \le p < \infty$ を満たす L^p ノルムに関する一意な最良近似を用いて，距離関数を近似できることを示す．第 8.3 小節では，有限次元スペクトル部分空間の連続性を示し，定理 8.8 の (B3) に述べるように，共通のコンパクトな周囲空間への連続拡張が一様収束する正規直交基底を構成する．第 8.4 小節では，これらの結果を組み合わせ，定理 8.11 の局所写像と入力に応じて変わるノルムを構成する．

規約と記号． すべてのコンパクト距離空間は空でないものとし，有限次元座標空間は実数体上で考える．確率測度の弱収束と一様積分評価は，第 2.3 小節で振り返る．スペクトル摂動のために複素数係数を明示した場合を除き，関数空間は実数体上で考える．等長写像とは，全射な等長埋め込みをいう．組 (X, d) は，台集合とその距離の双方を指定する．特に，$\mathfrak{m}_{X,d}$ と $T_{X,d}$ はこの組に依存する．コンパクト空間が共通の周囲空間に等長埋め込みされているとき，埋め込まれた部分集合と制限距離にも同じ記号を用いる．X 上の恒等写像を id_X で表す．定義域が指定されているときは添字を省略する．列の添字は $\mathbb{Z}_{\ge 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ で取る．

7. 準備

L^p における最良近似，コンパクト自己共役作用素のスペクトル定理，有限スペクトル部分空間の比較に用いる摂動結果を述べる．最後の小節では，有限スペクトル部分空間の基底の正規化に用いる行列の定理を述べる．

7.1. **Lebesgue 空間における最良近似.** 空でないコンパクト距離空間 (X, d) を固定する．X 上の確率測度 μ と指数 $1 \leq p < \infty$ に対し，μ-ほとんど至る所等しい可測関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を同一視する．次のノルムが有限となる同値類の空間を $L^p(X, \mu)$ で表す．

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

定理 7.1 (最良近似，[13, Lemma 3.2.36(b), Theorem 5.6.1] の帰結)．$1 < p < \infty$ とし，μ を X 上の確率測度とし，$A \subset L^p(X, \mu)$ は空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $f \in L^p(X, \mu)$ に対し，次を満たす $g \in A$ が一意に存在する．

$$\|f - g\|_p = \inf_{v \in A} \|f - v\|_p.$$

証明. 引用した定理 5.6.1 により，$L^p(X, \mu)$ は一様凸である．平行移動した集合 $\{v - f \mid v \in A\}$ は空でない閉凸集合である．引用文献の補題 3.2.36(b) により，この集合内に最小ノルムを持つ元が一意に存在する．この元を f だけ平行移動すれば，主張を得る． □

7.2. **コンパクト作用素とスペクトル分解.** Hilbert 空間 H に対し，有界線形作用素 $T\colon H \to H$ による H の閉単位球の像の閉包がコンパクトであるとき，この作用素をコンパクトという．任意の $f, \psi \in H$ に対し

$$\langle Tf, \psi \rangle_H = \langle f, T\psi \rangle_H.$$

が成り立つとき，T を自己共役という．$Tf = \lambda f$ を満たす零でないベクトル f を，固有値 λ に対する固有ベクトルという．関数空間上の作用素については，これを固有関数とも呼ぶ．

実 Hilbert 空間 H の複素化を $H_{\mathbb{C}} = H \oplus \sqrt{-1}H$ で表す．T の複素線形拡張にも同じ記号を用いる．$f, \psi \in H$ に対し，次のようにおく．

$$T(f + \sqrt{-1}\psi) = Tf + \sqrt{-1}T\psi.$$

複素 Banach 空間の恒等作用素を id で表す．その空間上の有界作用素 T のスペクトル $\operatorname{spec}(T)$ とは，$\lambda \operatorname{id} - T$ が有界な逆作用素を持たないような複素数 λ の集合である．実 Hilbert 空間上の作用素については，$H_{\mathbb{C}}$ への複素線形拡張のスペクトルを用いる．自己共役作用素の場合，この集合は実数からなる．有限次元の場合には，固有値全体の集合に等しい．無限次元の場合，0 は固有値でなくてもスペクトルに属することがある．

定理 7.2 (Riesz–Schauder の定理および自己共役作用素のスペクトル定理，[44, Theorems 14.19 and 15.22])．T を，可分な実 *Hilbert* 空間 H 上のコンパクト自己共役作用素とする．このとき，零でないスペクトル値はすべて，

有限次元の固有空間を持つ実固有値である．各 $a > 0$ に対し，絶対値が a より大きい固有値は，重複度を数えて有限個しかない．部分集合 $J \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を添字集合とする有限または可算の正規直交族 $\{\psi_k\}_{k\in J}$ と，対応する零でない固有値 $\{\lambda_k\}_{k\in J}$ が存在し，次が成り立つ．

$$H = \ker T \ \oplus\ \overline{\operatorname{span}}\{\psi_k \mid k \in J\}.$$

任意の $f \in H$ は，次の分解を持つ．

$$f = f_0 + \sum_{k\in J} \langle f, \psi_k\rangle \psi_k.$$

この分解に対する作用素の作用は，次で与えられる．

$$Tf = \sum_{k\in J} \lambda_k \langle f, \psi_k\rangle \psi_k.$$

残りの成分は，次を満たす．

$$f_0 \in \ker T.$$

二つの級数はいずれも H で収束する．J が無限ならば，どのように数え上げても，その固有値は 0 に収束する．

これは，コンパクト正規作用素のスペクトル定理の自己共役の場合である [44, Theorems 14.19 and 15.22]．特に，零でないコンパクト自己共役作用素は，零でない固有値を持つ．

7.3. **スペクトル摂動と一般固有空間．** E を複素 Banach 空間とする．その閉単位球を

$$B = \{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$$

で表す．有界線形作用素の族 $\{A_j \colon E \to E\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_j(B)} \text{はコンパクト．}$$

を満たすとき，この族は集合的にコンパクトであるという．有界線形作用素 $A \colon E \to E$ への強収束とは，任意の $v \in E$ に対して $\|A_j v - Av\| \to 0$ が成り立つことをいう．

定理 7.3 (Riesz–Schauder, [44, Theorem 14.19])．$T \colon E \to E$ を複素 *Banach* 空間上のコンパクト線形作用素とする．このとき，任意の $\lambda \in \operatorname{spec}(T) \setminus \{0\}$ は固有値であり，次が成り立つ．

$$0 < \dim \ker(T - \lambda \operatorname{id}) < \infty.$$

零でないスペクトルは高々可算であり，零以外には集積点を持たない．

定理 7.4 (スペクトルの包含，[1, Theorem 5.3])． $A_j, A \colon E \to E$ を複素 *Banach* 空間上の有界線形作用素とする．$A_j \to A$ が強収束し，$\{A_j - A\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が集合的にコンパクトであると仮定する．このとき，$\operatorname{spec}(A)$ を含む任意の開集合 $U \subset \mathbb{C}$ に対し，$j_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し，任意の $j \geq j_0$ について次が成り立つ．

$$\operatorname{spec}(A_j) \subset U.$$

定理 7.4 の仮定の下で，$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}(A)$ を固定し，次のように定める．

$$L_j = (\zeta \operatorname{id} - A)^{-1}(A_j - A).$$

作用素 L_j は 0 に強収束し，集合的にコンパクトな族をなす．[1, Proposition 3.3] により，$\|L_j^2\| \to 0$ が成り立つ．十分大きいすべての j について，Neumann 級数により $\operatorname{id} - L_j^2$ は可逆となり，次が成り立つ．

$$(\operatorname{id} - L_j)^{-1} = (\operatorname{id} + L_j)(\operatorname{id} - L_j^2)^{-1}.$$

したがって，

$$\zeta \operatorname{id} - A_j = (\zeta \operatorname{id} - A)(\operatorname{id} - L_j)$$

は可逆であり，$\zeta \notin \operatorname{spec}(A_j)$ を得る．これは，[1, proof of Theorem 5.3] における，固定した ζ についての議論である．

定義 7.5 (Riesz 射影, [44, Definition 14.23 and Proposition 14.28])．$T\colon E \to E$ を複素 Banach 空間上の有界線形作用素とする．Γ を，$\operatorname{spec}(T)$ と交わらず，$\operatorname{spec}(T)$ の各点における回転数が 0 または 1 である，正の向きを付けた有限個の長さ有限な Jordan 曲線の和集合とする．T の *Riesz* 射影とは，次で定める有界線形作用素 $\Pi_\Gamma(T)\colon E \to E$ である．

$$\Pi_\Gamma(T) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma (\zeta \operatorname{id} - T)^{-1}\, d\zeta,$$

ここで，線積分は作用素ノルムに関して取る．$\lambda \in \operatorname{spec}(T)$ であり，Γ の回転数が λ で 1，$\operatorname{spec}(T) \setminus \{\lambda\}$ の各点で 0 となるとき，$\Pi_\Gamma(T)$ をλ に付随する *Riesz* 射影という．

補題 7.6 ([44, Examples 14.24(1) and Proposition 14.28])．T と Γ を定義 *7.5* の通りとする．このとき，

$$\Pi_\Gamma(T)^2 = \Pi_\Gamma(T),$$

および

$$T\Pi_\Gamma(T) = \Pi_\Gamma(T)T.$$

が成り立つ．さらに，$\Pi_\Gamma(T)$ は，Γ の回転数が 1 となる $\operatorname{spec}(T)$ の部分集合のみに依存する．

定理 7.7 (スペクトル射影の収束, [1, Proposition 6.3])．$A_j, A\colon E \to E$ は定理 *7.4* の作用素に関する仮定を満たすとする．Γ は A に対する定義 *7.5* の条件を満たすとし，次のようにおく．

$$\Pi = \Pi_\Gamma(A).$$

このとき，十分大きいすべての j に対し，Γ は A_j に対する定義 *7.5* の条件を満たし，

$$\Pi_j = \Pi_\Gamma(A_j)$$

で定める射影 $\Pi_j\colon E \to E$ は次を満たす．

$$\dim \operatorname{range} \Pi_j = \dim \operatorname{range} \Pi.$$

任意の $v \in E$ に対し，さらに次が成り立つ．

$$\|\Pi_j v - \Pi v\| \to 0.$$

A_j と A がコンパクトであり，Γ の 0 における回転数が 0 ならば，$\dim \operatorname{range} \Pi_j$ と $\dim \operatorname{range} \Pi$ は有限である．

複素 Banach 空間上の有界線形作用素 $T\colon E \to E$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，λ における一般固有空間を

$$\mathcal{G}_\lambda(T) = \bigcup_{m \geq 1} \ker\bigl((T - \lambda \operatorname{id})^m\bigr)$$

で表す．

定理 7.8 ([1, Section 7, p. 429], [44, Proposition 14.28 and Examples 14.29])．*$T\colon E \to E$ を複素 Banach 空間上のコンパクト線形作用素とする．任意の $\lambda \in \operatorname{spec}(T) \setminus \{0\}$ に対し，λ に付随する Riesz 射影を $\Pi_{T,\lambda}$ で表す．このとき，次が成り立つ．*

$$\operatorname{range} \Pi_{T,\lambda} = \mathcal{G}_\lambda(T).$$

より一般に，$\Lambda \subset \operatorname{spec}(T) \setminus \{0\}$ を有限集合とし，Γ は T に対する定義 7.5 の条件を満たすとする．Γ の回転数が，Λ の各点で 1，$\operatorname{spec}(T) \setminus \Lambda$ の各点で 0 であると仮定する．このとき，

$$\Pi_\Gamma(T) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Pi_{T,\lambda},$$

および

$$\operatorname{range} \Pi_\Gamma(T) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda(T).$$

が成り立つ．

7.4. **正定値行列の平方根．** Gram 行列から正規直交基底を構成するために，次の結果を用いる．

定理 7.9 ([7, Theorems 7.29 and 7.39])．任意の実対称行列は，固有ベクトルからなる正規直交基底を持つ．さらに正定値ならば，対称正定値平方根を一意に持つ．正規直交固有基底に関して，この平方根は，元の固有値の正の平方根を成分とする対角行列である．

8. 距離の有限次元近似

ここからは，コンパクト距離空間上の距離関数を，有限次元ベクトル空間の関数で近似する．選択した確率測度により，このベクトル空間は等長写像に関して不変となる．7 節のスペクトルに関する結果を用い，まず一つの空間で近似を示す．次に，得られる関数と座標を，近くの空間の間で比較する．

簡単な構成によって，有限次元座標が距離を近似できる理由を説明する．(X, d) を空でないコンパクト距離空間とし，$\varepsilon > 0$ を固定して有限 ε-ネット $\{z_0, \dots, z_{m-1}\}$ を選ぶ．次の写像を続く式で定める．

$$\Theta\colon X \to \mathbb{R}^m$$

$$\Theta(x) = \bigl(d(x, z_0), \dots, d(x, z_{m-1})\bigr).$$

任意の $x, y \in X$ に対し，次が成り立つ．

$$d(x,y) - 2\varepsilon \le \|\Theta(x) - \Theta(y)\|_\infty \le d(x,y). \tag{8.1}$$

有限個の関数による構成は，Shioya の距離測度空間の近似 [51, author's manuscript, Section 4.4, Definition 4.37, Theorem 4.43 and Corollary 4.44] の基礎にもなっている．より正確には，任意の mm 空間 (X, d_X, μ_X) と $\varepsilon > 0$ に対し，整数 $N \ge 1$ が存在し，X 上に実数値 1-Lipschitz 関数 $f_1, \dots, f_N$ を選んで，写像 $\Phi = (f_1, \dots, f_N)$ が次を満たすようにできる．

$$\square\big(X, (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \Phi_*\mu_X)\big) < \varepsilon.$$

ここで，$\square$ は定義 2.21 の距離である．評価(8.1)は，一つのコンパクト空間のすべての点対にわたる一様誤差に関するものである．本論文の構成では，Gromov–Hausdorff 近傍全体での連続性と，等長写像との整合性も必要となる．一つの空間内の有限ネットだけでは，このような連続な選択は定まらない．有限スペクトル部分空間は，定理 8.11 の座標類を与える．収束する空間の列について，(A4) により，ノルムと座標写像が指定された収束を満たす座標対が得られる．条件 (A2) は，等長写像に関する変換則を定める．これらの座標は，一意な最良近似の係数である．各コンパクト距離空間 (Y, e) について，座標空間上にノルム N_Y を定める．正規直交基底の変換により，各座標ベクトル v は gv に置き換わる．新しい座標でのベクトル v は，古い座標では $g^{-1}v$ を表すので，新しい座標でのノルムは $N_Y \circ g^{-1}$ となる．したがって，座標ベクトル間の距離は基底に依存しない．

この節全体を通して，$\mathfrak{m}_{X,d}$ は定理 5.9 の対応を表す．二つの添字は，台集合 X とその距離 d を表す．

8.1. **距離作用素とそのスペクトル部分空間.** 空でないコンパクト距離空間 (X, d) を固定する．空間

$$H_X = L^2(X, \mathfrak{m}_{X,d})$$

に内積

$$\langle f, \psi \rangle_{H_X} = \int_X f\psi \, d\mathfrak{m}_{X,d}.$$

を入れる．これは可分な実 Hilbert 空間である．ここで，可分性は，L^2 における連続関数の稠密性と，コンパクト距離空間に対する $C(X)$ の可分性から従う [44, Section 6.4]．距離作用素 $T_{X,d}\colon H_X \to H_X$ を次のように定義する．任意の $f \in H_X$ と $x \in X$ に対し，次のようにおく．

$$T_{X,d} f(x) = \int_X d(x,z) f(z) \, d\mathfrak{m}_{X,d}(z).$$

この積分は f の代表の選び方によらない．これは [42, Definition 11] の距離核作用素である．

補題 8.1. 作用素 $T_{X,d}\colon H_X \to H_X$ はコンパクトかつ自己共役である．これは H_X を $C(X)$ に写し，任意の $f \in H_X$ と $x, y \in X$ に対し，

$$\|T_{X,d} f\|_\infty \le \operatorname{diam}(X,d) \|f\|_2, \tag{8.2}$$

および

$$|T_{X,d}f(x) - T_{X,d}f(y)| \le d(x,y)\|f\|_2. \tag{8.3}$$

が成り立つ．零でない固有値に対応する任意の固有関数は，一意な連続代表を持つ．

距離作用素のコンパクト性と自己共役性は，[42, Propositions 12 and 13] でも証明されている．

証明．$f \in H_X$ と $x, y \in X$ とする．Cauchy–Schwarz の不等式 [13, Lemma 3.2.27] と $\mathfrak{m}_{X,d}(X) = 1$ により，次を得る．

$$\int_X |f|\, d\mathfrak{m}_{X,d} \le \|f\|_2.$$

したがって，

$$|T_{X,d}f(x)| \le \int_X d(x,z)|f(z)|\, d\mathfrak{m}_{X,d}(z) \le \operatorname{diam}(X,d)\|f\|_2, \tag{8.4}$$

および

$$\begin{aligned} |T_{X,d}f(x) - T_{X,d}f(y)| &\le \int_X |d(x,z) - d(y,z)|\, |f(z)|\, d\mathfrak{m}_{X,d}(z) \\ &\le d(x,y)\|f\|_2. \end{aligned} \tag{8.5}$$

が成り立つ．評価(8.4)と(8.5)，および Arzelà–Ascoli の定理（定理 2.9）により，$T_{X,d}\colon H_X \to C(X)$ はコンパクトである．包含写像 $C(X) \to H_X$ は有界なので，H_X 上の作用素もコンパクトである．核の対称性と Fubini の定理 [13, Theorem 2.8.20(a)] から自己共役性が従う．

H_X において $T_{X,d}f = \lambda f$ であり，$\lambda \ne 0$ ならば，$\lambda^{-1}T_{X,d}f$ は f の連続代表である．$\mathfrak{m}_{X,d}$ は全台を持つので，この代表は一意である． □

零でない固有値に対応する各固有関数については，一意な連続代表を用いる．H_X 上の $T_{X,d}$ に定理 7.2 を適用し，その定理のように，正規直交族 $\{\psi_k\}_{k\in J}$ と対応する零でない固有値 $\{\lambda_k\}_{k\in J}$ を選ぶ．$a > 0$ に対し，

$$J_{X,a} = \{k \in J \mid |\lambda_k| > a\},$$

および

$$V_{X,a} = \operatorname{span}\{\psi_k \mid k \in J_{X,a}\}.$$

とおく．これは連続関数からなる有限次元空間である．直交射影 $P_{X,a}\colon H_X \to V_{X,a}$ を次で定める．

$$P_{X,a}f = \sum_{k\in J_{X,a}} \langle f, \psi_k\rangle_{H_X}\psi_k. \tag{8.6}$$

同じことを次のようにも書ける．

$$V_{X,a} = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\operatorname{spec}(T_{X,d})\\ |\lambda|>a}} \ker(T_{X,d} - \lambda\,\mathrm{id}),$$

および

$$\operatorname{range} P_{X,a} = V_{X,a}.$$

これらの定義は，正規直交基底 $\{\psi_k\}_{k\in J}$ によらない．任意の $f \in H_X$ に対し，$a \downarrow 0$ のとき，ベクトル $P_{X,a}f$ は，H_X のノルムに関して，f の $(\ker T_{X,d})^{\perp}$ 上への直交射影に収束する．

8.2. **距離関数の近似.** まず，有限次元スペクトル部分空間の関数により，一様ノルムに関して距離プロファイルを近似する．$x \in X$ に対し，関数

$$d_x = d(x,\cdot) \in C(X)$$

を x の距離プロファイルという．その値は，x から X の各点までの距離である．写像

$$X \to C(X), \qquad x \longmapsto d_x$$

は，一様ノルムに関する等長埋め込みである．実際,

$$\|d_x - d_y\|_\infty = d(x,y).$$

が成り立つ．これは，Kuratowski 埋め込みの距離関数による構成である．ここでは，(X,d) がコンパクトなので，関数 d_x は有界である．次の定理では，一つの有限スペクトル部分空間内で，すべての距離プロファイルを近似する．

定理 8.2. 任意の空でないコンパクト距離空間 (X,d) と任意の $\eta > 0$ に対し，$a > 0$ が存在し，$a, -a \notin \operatorname{spec}(T_{X,d})$ および

$$\sup_{x\in X} \inf_{v\in V_{X,a}} \|d_x - v\|_\infty < \eta. \tag{8.7}$$

が成り立つ．$\operatorname{Card}(X) \geq 2$ ならば，さらに $\dim V_{X,a} \geq 1$ を要求できる．

証明. 零でない固有値に対応するすべての固有関数の連続代表が，$C(X)$ 内で生成する閉線形包を V とする．$f \in H_X$ に対し，$f_0 \in \ker T_{X,d}$ と $f_\perp \perp \ker T_{X,d}$ を満たすように $f = f_0 + f_\perp$ と書く．0 に収束する正の実数の減少列 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を，各 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $a_m, -a_m \notin \operatorname{spec}(T_{X,d})$ となるように選ぶ．零でないスペクトルは可算なので，このような列が存在する．Riesz–Schauder の定理および自己共役作用素のスペクトル定理（定理 7.2）により，$\|P_{X,a_m}f - f_\perp\|_2 \to 0$ が成り立つ．$f_0 \in \ker T_{X,d}$ なので，連続関数 $T_{X,d}f_0$ はほとんど至る所零である．$\mathfrak{m}_{X,d}$ の全台性により，任意の $x \in X$ に対して次が成り立つ．

$$(T_{X,d}f_0)(x) = 0. \tag{8.8}$$

(8.2)を用いると，次を得る．

$$\|T_{X,d}P_{X,a_m}f - T_{X,d}f\|_\infty \leq \operatorname{diam}(X,d)\|P_{X,a_m}f - f_\perp\|_2 \to 0.$$

任意の $a > 0$ に対し，次が成り立つ．

$$T_{X,d}P_{X,a}f \in V_{X,a} \subset V.$$

V は一様ノルムに関して閉じているので，$T_{X,d}f \in V$ が従う．

$x \in X$ と $r > 0$ を固定する．(2.18)の正規化された関数 $\mathrm{NB}^{\mathfrak{m}_{X,d}}_{X,d,x,r}$ を用いる．(2.19)，(2.20)，(2.21)により，この関数は非負で，積分が 1 であり，その台は $B(x, r; d)$ に含まれる．任意の $y \in X$ に対し，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &|T_{X,d}\mathrm{NB}^{\mathfrak{m}_{X,d}}_{X,d,x,r}(y) - d_x(y)| \\ &= \left| \int_X (d(y,z) - d(y,x))\mathrm{NB}^{\mathfrak{m}_{X,d}}_{X,d,x,r}(z)\, d\mathfrak{m}_{X,d}(z) \right| \\ &\le \int_X d(x,z)\mathrm{NB}^{\mathfrak{m}_{X,d}}_{X,d,x,r}(z)\, d\mathfrak{m}_{X,d}(z) \le r. \end{aligned} \tag{8.9}$$

(8.9)は任意の $r > 0$ について成り立ち，V は一様ノルムに関して閉じているので，$d_x \in V$ を得る．

定理の前で示した等式

$$\|d_x - d_y\|_\infty = d(x, y),$$

を思い出そう．$\eta/3$-球で X を覆う有限個の点 $x_0, \dots, x_{m-1}$ を選ぶ．各 i に対し，零でない固有値に対応する固有関数の有限和 v_i を，$\|d_{x_i} - v_i\|_\infty < \eta/3$ を満たすように選ぶ．これらの和に現れる固有値の有限集合を Λ とする．$a > 0$ を，

$$a, -a \notin \mathrm{spec}(T_{X,d}),$$

が成り立ち，かつ，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$a < |\lambda|.$$

となるように選ぶ．$\Lambda = \emptyset$ であっても，$a, -a \notin \mathrm{spec}(T_{X,d})$ を満たす正の実数 a を選べば十分である．零でないスペクトルは可算なので，このような実数が存在する．このとき，すべての v_i は $V_{X,a}$ に属する．$d(x, x_i) < \eta/3$ ならば，次が成り立つ．

$$\inf_{v \in V_{X,a}} \|d_x - v\|_\infty \le \|d_x - d_{x_i}\|_\infty + \|d_{x_i} - v_i\|_\infty < 2\eta/3.$$

これで(8.7)が示された．

X が一点集合でないとき，$d(x, z) > 0$ を満たす $x, z \in X$ を選ぶ．x からの距離は，正の測度を持つ z の近傍上で正なので，積分 $T_{X,d}1(x)$ は正である．したがって，$T_{X,d} \neq 0$ である．Riesz–Schauder の定理および自己共役作用素のスペクトル定理（定理 7.2）により，これは零でない固有値を持つ．必要ならば，この固有値の絶対値より小さく，なお $\pm a \notin \mathrm{spec}(T_{X,d})$ を満たす，より小さい正の a を選ぶ．この変更で(8.7)の近似は保たれ，$\dim V_{X,a} \ge 1$ が保証される． □

距離プロファイルの間の一様距離は元の距離に等しい．ただし，一様ノルムに関しては，有限次元部分空間での最良近似が一意とは限らない．そこで，L^p ノルムを最小化する．$1 < p < \infty$ の場合，定理 7.1 により最良近似は存在して一意である．補題 8.4 は，p が十分大きければ，距離プロファイルの間の L^p 距離が元の距離を一様に近似することを示す．次に，(8.15)では，(8.13)と有限次元のスペクトル近似を組み合わせる．

最良近似を比較するために，その係数についての次の連続性の主張を用いる．

補題 8.3. $n \geq 1$ とし，連続関数 $\mathcal{J}_j, \mathcal{J} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が各コンパクト部分集合上一様収束するとする．各 c_j が $\mathcal{J}_j$ を最小化し，これらのベクトルが有界列をなし，$\mathcal{J}$ が一意な最小化元 c を持つと仮定する．このとき，$c_j \to c$ である．

証明. c_j の有界性により，$M > 0$ を次が成り立つように選ぶ．

$$\{c_j \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subset \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\|_2 \leq M\}.$$

この閉球はコンパクトなので，任意の部分列は収束する部分列をさらに持つ．このような部分列 $\{c_{n_k}\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の極限を v で表す．この極限は $\|v\|_2 \leq M$ を満たし，仮定した一様収束から次が従う．

$$\sup_{\substack{w \in \mathbb{R}^n \\ \|w\|_2 \leq M}} |\mathcal{J}_{n_k}(w) - \mathcal{J}(w)| \longrightarrow 0. \tag{8.10}$$

$\mathcal{J}$ は連続であり，$c_{n_k} \to v$ なので，これら二つの係数ベクトルでの値の差は 0 に収束する．目的関数の誤差 $|\mathcal{J}_{n_k}(c_{n_k}) - \mathcal{J}(c_{n_k})|$ は，(8.10)により 0 に収束する．したがって，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &|\mathcal{J}_{n_k}(c_{n_k}) - \mathcal{J}(v)| \leq \\ &|\mathcal{J}_{n_k}(c_{n_k}) - \mathcal{J}(c_{n_k})| + |\mathcal{J}(c_{n_k}) - \mathcal{J}(v)| \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{8.11}$$

比較対象 $w \in \mathbb{R}^n$ を固定すると，各添字における最小性と，その比較対象での収束から次が従う．

$$\mathcal{J}(v) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{J}_{n_k}(c_{n_k}) \leq \lim_{k \to \infty} \mathcal{J}_{n_k}(w) = \mathcal{J}(w). \tag{8.12}$$

よって，一意性により $v = c$ である．相対コンパクト性と部分列極限の一意性から，$c_j \to c$ が従う． □

補題 8.4. (X, d) を空でないコンパクト距離空間とし，$D = \operatorname{diam}(X, d)$ とおく．このとき，任意の $r > 0$ に対し，数

$$c_r = \inf_{x \in X} \mathfrak{m}_{X,d}(B(x, r; d))$$

は正である．さらに，任意の $r > 0$，任意の $2 \leq p < \infty$，および任意の組 $x, y \in X$ に対し，次が成り立つ．

$$0 \leq d(x, y) - \|d_x - d_y\|_{L^p(\mathfrak{m}_{X,d})} \leq D(1 - c_r^{1/p}) + 2r. \tag{8.13}$$

証明. この証明では，$L^p(X, \mathfrak{m}_{X,d})$ 上のノルムを $\|\cdot\|_p$ で表す．有限の $r/4$-ネット $\{z_0, \ldots, z_{m-1}\}$ を選ぶ．各 $x \in X$ に対し，ある i が $d(x, z_i) < r/4$ を満たし，このとき $B(z_i, r/4; d) \subset B(x, r; d)$ となる．したがって，次を得る．

$$c_r \geq \min_{0 \leq i < m} \mathfrak{m}_{X,d}(B(z_i, r/4; d)) > 0.$$

すべての $z \in X$ に対し，$|d_x(z) - d_y(z)| \leq d(x, y)$ である．$z \in B(x, r; d)$ に対しては，次が成り立つ．

$$d_y(z) - d_x(z) \geq d(x, y) - 2d(x, z) > d(x, y) - 2r.$$

したがって，次を得る．

$$c_r^{1/p}\max\{d(x,y)-2r,0\} \le \|d_x - d_y\|_p \le d(x,y). \tag{8.14}$$

$\mathfrak{m}_{X,d}$ は確率測度であり，球の測度は正なので，$0 < c_r \le 1$ である．よって，$0 < c_r^{1/p} \le 1$ となる．(8.14)の下側の評価と

$$\max\{d(x,y)-2r,0\} \ge d(x,y)-2r$$

から次が従う．

$$\begin{aligned} d(x,y) - \|d_x - d_y\|_p &\le d(x,y) - c_r^{1/p}\max\{d(x,y)-2r,0\} \\ &\le d(x,y) - c_r^{1/p}\big(d(x,y)-2r\big) \\ &= (1-c_r^{1/p})d(x,y) + 2rc_r^{1/p} \\ &\le (1-c_r^{1/p})D + 2r. \end{aligned}$$

最後の不等式では，$d(x,y) \le D$，$1 - c_r^{1/p} \ge 0$，$c_r^{1/p} \le 1$ を用いた．これで(8.13)が示された． □

$V_{X,a}$ と $2 \le p < \infty$ を固定する．$L^p(X,\mathfrak{m}_{X,d})$ 上のノルムを $\|\cdot\|_p$ で表す．各 $x \in X$ に対し，$V_{X,a}$ 上で $v \mapsto \|d_x - v\|_p^p$ を最小化する一意な元を v_x とする．スペクトル部分空間 $V_{X,a}$ は有限次元なので，$L^p(X,\mathfrak{m}_{X,d})$ 内で閉凸である．定理 7.1 により，この最小化元は存在し，一意である．$\mathfrak{m}_{X,d}$ は全台を持つので，自然な写像 $C(X) \to L^p(X,\mathfrak{m}_{X,d})$ は単射である．

関数 $v_x \in V_{X,a}$ を，距離プロファイルの有限次元近似という．写像 $X \to V_{X,a}$，$x \mapsto v_x$ は，単射とは限らない．これらの近似関数を用いて，誤差を制御しながら距離を近似する．

$r > 0$ および $\eta > 0$ とし，D と c_r を補題 8.4 のとおりとする．(8.7)が成り立つならば，任意の $x \in X$ に対して $\|d_x - v_x\|_p < \eta$ が成り立つ．$q_X \colon X \times X \to [0,\infty)$ を $q_X(x,y) = \|v_x - v_y\|_p$ で定める．任意の $x, y \in X$ に対して，ノルムの三角不等式から次が従う．

$$|q_X(x,y) - \|d_x - d_y\|_p| \le \|v_x - d_x\|_p + \|v_y - d_y\|_p < 2\eta.$$

これと補題 8.4 により，次が成り立つ．

$$\|q_X - d\|_\infty \le 2\eta + D(1 - c_r^{1/p}) + 2r. \tag{8.15}$$

誤差の許容値が指定されたら，まず r を小さく選び，次に十分大きい有限の p を選ぶ．最後に η を小さく選び，これに対応するスペクトル部分空間を選ぶ．

8.3. **有限スペクトル部分空間の連続性.** 異なるコンパクト空間の距離作用素は，異なる Hilbert 空間に作用する．距離核を一つのコンパクト距離空間 (Z,h) に拡張し，固定された Banach 空間 $C(Z,\mathbb{C})$ 上の作用素を得る．これらの周囲空間上の作用素に，Anselone と Palmer のスペクトルの包含およびスペクトル射影の収束の定理，すなわち第 7.3 小節の定理 7.4 と 7.7 を適用する．スペクトルの包含により，選んだ実数 $\pm a$ における隙間は，十分大きいすべての添字に対して保たれる．スペクトル射影の収束に

より，保持されるスペクトル部分空間の次元は，十分大きいすべての添字に対して同じになる．

補題 2.17 により，以下で用いるパラメータに依存した積分は一様収束する．

次の命題では，周囲空間上の核作用素の一般固有空間と，自己共役な距離作用素の一般固有空間を比較する．

命題 8.5. Y をコンパクト距離空間 (Z,h) の空でないコンパクト部分集合とし，

$$e = h|_{Y\times Y},$$

および

$$D = \operatorname{diam}(Z,h).$$

とおく．$T_{Y,e}$ を，その複素線形拡張

$$T_{Y,e}\colon L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C}) \to L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C}).$$

とみなす．$\mathsf{R}_Y\colon C(Z,\mathbb{C}) \to L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C})$ を次のように定める．任意の $f \in C(Z,\mathbb{C})$ に対し，$\mathsf{R}_Y f$ を $f|_Y$ の同値類とする．$\mathsf{S}_Y\colon L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C}) \to C(Z,\mathbb{C})$ を次のように定める．任意の $\psi \in L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C})$ に対し，$w \in Y$ を積分変数として，任意の $z \in Z$ について次を定める．

$$(\mathsf{S}_Y\psi)(z) = \int_Y h(z,w)\psi(w)\,d\mathfrak{m}_{Y,e}(w).$$

この積分は ψ の同値類のみに依存する．有界連続な核により，Z 上の連続関数が定まる．次のようにおく．

$$B_Y = \mathsf{S}_Y\mathsf{R}_Y\colon C(Z,\mathbb{C}) \to C(Z,\mathbb{C}).$$

このとき，B_Y はコンパクトである．任意の $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し，一般固有空間は

$$\mathcal{G}_\lambda(B_Y) = \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id}),$$

および

$$\mathcal{G}_\lambda(T_{Y,e}) = \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id}).$$

を満たす．さらに，任意の $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ と任意の整数 $m \geq 1$ に対し，

$$\ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr) = \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id}),$$

および

$$\ker\bigl((T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr) = \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id}).$$

が成り立つ．制限により，線形同型

$$\mathsf{R}_Y\colon \mathcal{G}_\lambda(B_Y) \to \mathcal{G}_\lambda(T_{Y,e}),$$

が誘導される．その逆写像は，制限された写像

$$\lambda^{-1}\mathsf{S}_Y\colon \mathcal{G}_\lambda(T_{Y,e}) \to \mathcal{G}_\lambda(B_Y).$$

である．さらに，次が成り立つ．

$$\operatorname{spec}(B_Y)\setminus\{0\} = \operatorname{spec}(T_{Y,e})\setminus\{0\} \subset [-D,D].$$

証明. **段階 1．コンパクト性と分解．** $\mathfrak{m}_{Y,e}$ の全測度は 1 なので，任意の $f \in C(Z,\mathbb{C})$ に対し，次が成り立つ．

$$\|\mathsf{R}_Y f\|_2 \le \|f\|_\infty.$$

任意の $\psi \in L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C})$ と $z, z_0 \in Z$ に対し，Cauchy–Schwarz の不等式から

$$\|\mathsf{S}_Y \psi\|_\infty \le D\|\psi\|_2,$$

および

$$|\mathsf{S}_Y\psi(z) - \mathsf{S}_Y\psi(z_0)| \le h(z,z_0)\|\psi\|_2.$$

を得る．したがって，R_Y と S_Y は有界であり，Arzelà–Ascoli の定理（定理 2.9）から S_Y はコンパクトである．よって，B_Y はコンパクトである．定義により，

$$B_Y = \mathsf{S}_Y\mathsf{R}_Y, \tag{8.16}$$

および

$$T_{Y,e} = \mathsf{R}_Y\mathsf{S}_Y, \tag{8.17}$$

および

$$\mathsf{R}_Y B_Y = T_{Y,e}\mathsf{R}_Y. \tag{8.18}$$

が成り立つ．

作用素を絡み合わせる等式を図 3 に示す．

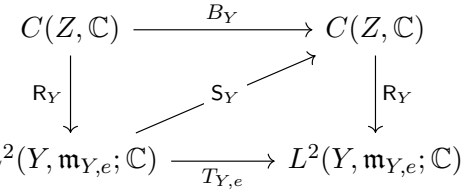


図 3. 制限は，周囲空間上の作用素 B_Y と距離作用素 $T_{Y,e}$ を絡み合わせる．分解 $B_Y = \mathsf{S}_Y\mathsf{R}_Y$ と $T_{Y,e} = \mathsf{R}_Y\mathsf{S}_Y$ により，零でないスペクトルに対応する両者の部分空間を比較できる．

段階 2．一般固有空間と制限． $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ と整数 $m \ge 1$ を固定する．自己共役作用素のスペクトル定理（定理 7.2）により，次が成り立つ．

$$\ker\bigl((T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr) = \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id}). \tag{8.19}$$

次の等式を示す．

$$\mathsf{R}_Y\left(\ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)\right) = \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id}). \tag{8.20}$$

$\psi \in \mathsf{R}_Y\left(\ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)\right)$ を取る．すると $\psi = \mathsf{R}_Y f$ を満たす $f \in \ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)$ が存在する．(8.18)により，次が成り立つ．

$$(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id})^m\psi = \mathsf{R}_Y(B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m f = 0.$$

したがって，(8.19)から $\psi \in \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id})$ が従う．

逆に，$\psi \in \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id})$ を取り，$f = \lambda^{-1}\mathsf{S}_Y\psi$ とおく．(8.16)と(8.17)を用いると，

$$\mathsf{R}_Y f = \lambda^{-1} T_{Y,e}\psi = \psi, \tag{8.21}$$

および

$$B_Y f = \mathsf{S}_Y\psi = \lambda f. \tag{8.22}$$

を得る．よって，$f \in \ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)$ であり，(8.21)から $\psi \in \mathsf{R}_Y\bigl(\ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)\bigr)$ が従う．これで(8.20)が示された．

制限作用素 R_Y は $\ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)$ 上で単射である．これを見るために，この核内の f で $\mathsf{R}_Y f = 0$ を満たすものを取る．このとき，(8.16)から $B_Y f = 0$ が従うので，次が成り立つ．

$$0 = (B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m f = (-\lambda)^m f.$$

$\lambda \neq 0$ なので，$f = 0$ である．

次に，

$$\ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr) = \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id}). \tag{8.23}$$

を証明する．$f \in \ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)$ を取り，

$$\psi = \mathsf{R}_Y f,$$

および

$$v = \lambda^{-1}\mathsf{S}_Y\psi.$$

とおく．(8.20)，(8.21)，(8.22)から，

$$v \in \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id}),$$

および

$$\mathsf{R}_Y v = \mathsf{R}_Y f.$$

が従う．f と v はいずれも，

$$\ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr),$$

すなわち(8.23)の左辺の核に属する．この核上での制限の単射性から $f = v$ となり，よって $f \in \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id})$ である．逆に，$f \in \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id})$ ならば，次が成り立つ．

$$(B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m f = (B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^{m-1} 0 = 0.$$

したがって，$f \in \ker\bigl((B_Y - \lambda\,\mathrm{id})^m\bigr)$ である．これで(8.23)が示された．(8.19)と(8.23)において $m \geq 1$ 全体の和集合を取ると，対応する一般固有空間が定まる．特に，制限は線形同型

$$\mathsf{R}_Y\colon\ \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id}) \to \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id}),$$

を誘導する．その逆写像は，制限された写像

$$\lambda^{-1}\,\mathsf{S}_Y|_{\ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id})}\colon\ \ker(T_{Y,e} - \lambda\,\mathrm{id}) \to \ker(B_Y - \lambda\,\mathrm{id}).$$

である．

段階 3．零でないスペクトルの一致． 両作用素はコンパクトなので，Riesz–Schauder の定理（定理 7.3）により，零でないスペクトル値はすべて固有値である．補題 8.1 により，$\|T_{Y,e}\| \leq \mathrm{diam}(Y,e) \leq D$ である．有界

作用素に対する標準的なスペクトルの評価 [44, Theorem 14.3] から，次が従う．

$$\operatorname{spec}(T_{Y,e}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T_{Y,e}\|\}.$$

$T_{Y,e}$ は自己共役なので，そのスペクトルは実数からなる．したがって，次が成り立つ．

$$\operatorname{spec}(B_Y) \setminus \{0\} = \operatorname{spec}(T_{Y,e}) \setminus \{0\} \subset [-D, D].$$

これで，零でないスペクトルの一致とその評価が示され，証明が完了した． □

まず，固定されたコンパクトな台集合について，周囲空間上の Riesz 射影と直交射影を比較する．次に，台集合が変化するときの周囲空間上の射影の収束を証明する．

命題 8.6. Y をコンパクト距離空間 (Z, h) の空でないコンパクト部分集合とし，$e = h|_{Y\times Y}$ とおく．命題 *8.5* の作用素を用いる．$\pm a \notin \operatorname{spec}(T_{Y,e})$ を満たす $a > 0$ を固定する．定義 *7.5* のように，絶対値が a より大きい固有値に付随する B_Y の *Riesz* 射影を Π_Y とする．このとき，この射影は実数値関数を保ち，制限は複素線形同型

$$\mathsf{R}_Y \colon \operatorname{range}\Pi_Y \to V_{Y,a} + \sqrt{-1}V_{Y,a}.$$

を誘導する．直交射影の複素線形拡張にも $P_{Y,a}$ を用いる．任意の $f \in C(Z, \mathbb{C})$ に対し，次が成り立つ．

$$(\Pi_Y f)|_Y = P_{Y,a}(f|_Y).$$

証明. 命題 8.5 により，次が成り立つ．

$$\operatorname{spec}(B_Y) \setminus \{0\} = \operatorname{spec}(T_{Y,e}) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}. \tag{8.24}$$

実軸に関して対称な二つの長方形の和集合で，$0 \notin \overline{\Omega}$ を満たす有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ を選ぶ．(8.24)と仮定 $\pm a \notin \operatorname{spec}(T_{Y,e})$ により，各作用素 $T \in \{B_Y, T_{Y,e}\}$ に対して

$$\Omega \cap \operatorname{spec}(T) = \{\lambda \in \operatorname{spec}(T) \mid |\lambda| > a\}, \tag{8.25}$$

および

$$\partial\Omega \cap \operatorname{spec}(T) = \emptyset.$$

が成り立つように Ω を選べる．$\Gamma = \partial\Omega$ に正の向きを付ける．定義 7.5 と補題 7.6 により，次が成り立つ．

$$\Pi_Y = \Pi_\Gamma(B_Y).$$

定理 7.8 により，次が成り立つ．

$$\operatorname{range}\Pi_Y = \bigoplus_{\lambda\in\Omega\cap\operatorname{spec}(B_Y)} \mathcal{G}_\lambda(B_Y). \tag{8.26}$$

各 $\lambda \in \Omega \cap \operatorname{spec}(B_Y)$ に対し，命題 8.5 は，制限作用素 R_Y が $\mathcal{G}_\lambda(B_Y)$ を $\ker(T_{Y,e} - \lambda \operatorname{id})$ へ同型に写すことを示す．(8.26)の直和を取り，(8.25)を用いると，同型

$$\mathsf{R}_Y \colon \operatorname{range} \Pi_Y \to \bigoplus_{\substack{\lambda \in \operatorname{spec}(T_{Y,e}) \\ |\lambda| > a}} \ker(T_{Y,e} - \lambda \operatorname{id}).$$

を得る．$V_{Y,a}$ の定義により，この直和は $V_{Y,a} + \sqrt{-1} V_{Y,a}$ である．任意の連続関数について，射影と制限を結び付ける等式を証明する．任意の $\zeta \in \Gamma$ に対し，(8.18)から次が従う．

$$(\zeta \operatorname{id} - T_{Y,e}) \mathsf{R}_Y = \mathsf{R}_Y (\zeta \operatorname{id} - B_Y).$$

$\zeta \in \Gamma$ に対し，括弧内の両作用素は可逆である．それぞれの逆作用素を左と右から掛けると，次を得る．

$$\mathsf{R}_Y (\zeta \operatorname{id} - B_Y)^{-1} = (\zeta \operatorname{id} - T_{Y,e})^{-1} \mathsf{R}_Y. \tag{8.27}$$

両辺はいずれも $C(Z, \mathbb{C})$ から $L^2(Y, \mathfrak{m}_{Y,e}; \mathbb{C})$ への有界写像である．(8.27)の両レゾルベントは，作用素ノルムに関して $\zeta \in \Gamma$ に連続に依存する．したがって，線積分は Riemann 和の極限として計算できる．R_Y は有界線形なので，これらの和およびその極限と可換である．したがって，任意の $f \in C(Z, \mathbb{C})$ について次を得る．

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_Y \Pi_Y f &= \mathsf{R}_Y \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma (\zeta \operatorname{id} - B_Y)^{-1} f \, d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma \mathsf{R}_Y (\zeta \operatorname{id} - B_Y)^{-1} f \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma (\zeta \operatorname{id} - T_{Y,e})^{-1} \mathsf{R}_Y f \, d\zeta. \end{aligned} \tag{8.28}$$

(8.28)において，第 1 の等式は Π_Y の定義であり，第 2 の等式では R_Y の有界線形性を用い，第 3 の等式では(8.27)を用いた．

次に，(8.28)の最後の線積分が $P_{Y,a}(\mathsf{R}_Y f)$ に等しいことを証明する．ここで，(8.6)で定めた直交射影の複素線形拡張にも $P_{Y,a}$ を用いる．ψ を，固有値 λ に対応する $T_{Y,e}$ の固有ベクトルとする．任意の $\zeta \in \Gamma$ に対し，次が成り立つ．

$$(\zeta \operatorname{id} - T_{Y,e})^{-1} \psi = \frac{1}{\zeta - \lambda} \psi. \tag{8.29}$$

(8.29)を線積分に代入し，Γ の回転数を用いると，次を得る．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma (\zeta \operatorname{id} - T_{Y,e})^{-1} \psi \, d\zeta \\ &\quad = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda} \right) \psi = \begin{cases} \psi, & |\lambda| > a, \\ 0, & |\lambda| < a. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.30}$$

スカラーの線積分は，λ が Γ の内側にあるとき 1，外側にあるとき 0 に等しい．後者の場合には $\lambda = 0$ も含まれるので，この線積分は $\ker T_{Y,e}$ 上

で零となる．L^2 ノルムで閉包を取る．自己共役作用素のスペクトル定理（定理 7.2）により，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\overline{\ker T_{Y,e} \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda\in\operatorname{spec}(T_{Y,e})\\ \lambda\neq 0}} \ker(T_{Y,e}-\lambda\,\mathrm{id})}\\ &\qquad = L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C}).\end{aligned} \tag{8.31}$$

(8.30)，(8.6)，および相異なる固有値の固有空間の直交性により，線積分で定めた作用素と $P_{Y,a}$ は，(8.31)の各直和成分上で一致する．線形性と有界性により，(8.31)の稠密性から，$L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C})$ 上の作用素として次が示される．

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\Gamma (\zeta\,\mathrm{id}-T_{Y,e})^{-1}\,d\zeta = P_{Y,a} \tag{8.32}$$

(8.32)を(8.28)に代入すると，次を得る．

$$\mathsf{R}_Y\Pi_Y f = P_{Y,a}\mathsf{R}_Y f.$$

$\mathsf{R}_Y f = f|_Y$ なので，次が従う．

$$(\Pi_Y f)|_Y = P_{Y,a}(f|_Y). \tag{8.33}$$

左辺では，$C(Z,\mathbb{C})$ 内で射影した後，Y に制限している．右辺では，先に制限した後，$L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e};\mathbb{C})$ 上の射影を適用している．(8.33)の両辺は Y 上で連続である．$\mathfrak{m}_{Y,e}$ は全台を持つので，L^2 における一致から，Y 上での各点での一致も従う．

最後に，距離核は実数値であり，Ω は複素共役に関して不変である．したがって，線積分を共役に取り，Γ の向きを反転すると，次を得る．

$$\overline{\Pi_Y f} = \Pi_Y \overline{f}.$$

よって，Π_Y は実数値関数を保つ． □

命題 8.7. X_j, X をコンパクト距離空間 (Z,h) の空でないコンパクト部分集合とし，制限距離を

$$d_j = h|_{X_j\times X_j},$$

および

$$d = h|_{X\times X},$$

とする．さらに，

$$\mathcal{H}[h](X_j,X)\to 0,$$

が成り立つとし，$\iota_j\colon X_j\hookrightarrow Z$ と $\iota\colon X\hookrightarrow Z$ を包含写像とする．Z 上の確率測度を $\bar\mu_j = (\iota_j)_*\mathfrak{m}_{X_j,d_j}$ および $\bar\mu = \iota_*\mathfrak{m}_{X,d}$ で定める．$a,-a\notin\operatorname{spec}(T_{X,d})$ を満たす $a>0$ を固定する．命題 *8.5* の作用素を用い，

$$A_j = B_{X_j},$$

および

$$A = B_X.$$

とおく．このとき，十分大きいすべての j に対し，

$$\pm a\notin\operatorname{spec}(T_{X_j,d_j}),$$

および

$$\dim V_{X_j,a} = \dim V_{X,a} = n.$$

が成り立つ．さらに，それぞれ A_j と A の絶対値が a より大きい固有値に付随する，有限階数の *Riesz* 射影

$$\Pi_j, \Pi \colon C(Z,\mathbb{C}) \to C(Z,\mathbb{C})$$

が存在する．それらの像は，有限次元の直和

$$\operatorname{range}\Pi = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\operatorname{spec}(A)\\ |\lambda|>a}} \mathcal{G}_\lambda(A),$$

および，十分大きい任意の j に対する

$$\operatorname{range}\Pi_j = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\operatorname{spec}(A_j)\\ |\lambda|>a}} \mathcal{G}_\lambda(A_j).$$

である．両射影は実数値関数を保ち，任意の $f \in C(Z,\mathbb{C})$ について次を満たす．

$$\|\Pi_j f - \Pi f\|_\infty \to 0.$$

証明. **段階 1．強収束と集合的コンパクト性．** 包含写像 ι_j と ι に定理 5.9(M3) を適用すると，$\bar{\mu}_j \to \bar{\mu}$ が弱収束する．任意の $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$f \in C(Z,\mathbb{C})$，$z \in Z$ に対し，定義から

$$A_j f(z) = \int_Z h(z,w) f(w)\, d\bar{\mu}_j(w),$$

および

$$Af(z) = \int_Z h(z,w) f(w)\, d\bar{\mu}(w).$$

が従う．各 f を固定すると，族 $\{h(z,\cdot)f(\cdot) \mid z \in Z\}$ は $C(Z,\mathbb{C})$ 内でコンパクトである．パラメータ $z \in Z$ について補題 2.17 を用いると，次が成り立つ．

$$\|A_j f - Af\|_\infty \to 0. \tag{8.34}$$

したがって，$A_j \to A$ が強収束する．$D = \operatorname{diam}(Z,h)$ と書くと，任意の $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\|f\|_\infty \leq 1$ を満たす $f \in C(Z,\mathbb{C})$，および $z, z_0 \in Z$ に対して，

$$\|A_j f\|_\infty \leq D, \tag{8.35}$$

および

$$|A_j f(z) - A_j f(z_0)| \leq h(z,z_0). \tag{8.36}$$

を得る．よって，Arzelà–Ascoli の定理（定理 2.9）により，$\bigcup_j A_j\{f \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ の閉包はコンパクトである．したがって，$\{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は集合的にコンパクトである．命題 8.5 により A はコンパクトなので，族 $\{A_j - A\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ も集合的にコンパクトである．

段階 2．共通の境界とスペクトル射影． ここでは，十分大きいすべての j に対し，二点 $\pm a$ を $\mathrm{spec}(A_j)$ から除外するためだけに定理 7.4 を用いる．命題 8.5 と a に関する仮定により，次が成り立つ．

$$\mathrm{spec}(A) \subset \mathbb{C} \setminus \{-a, a\}.$$

集合 $\mathbb{C} \setminus \{-a, a\}$ は開いている．(8.34)の強収束と $\{A_j - A\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の集合的コンパクト性により，定理 7.4 の作用素に関する仮定が満たされる．この定理を開集合 $\mathbb{C} \setminus \{-a, a\}$ に適用すると，添字 $j_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を得て，任意の $j \geq j_0$ について次が成り立つ．

$$\{-a, a\} \cap \big(\mathrm{spec}(A) \cup \mathrm{spec}(A_j)\big) = \emptyset. \tag{8.37}$$

さらに，命題 8.5 から次が従う．

$$\pm a \notin \mathrm{spec}(T_{X_j, d_j}).$$

これで，主張した $\pm a$ の除外が示された．

次に，A と A_j の双方について，絶対値が a より大きい固有値を境界が囲むような有界開集合を選ぶ．$L > \max\{D, a\} + 1$ を選び，Ω を次の二つの長方形の和集合とする．

$$\{\zeta \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}\,\zeta < L,\ |\mathrm{Im}\,\zeta| < 1\},$$
$$\{\zeta \in \mathbb{C} \mid -L < \mathrm{Re}\,\zeta < -a,\ |\mathrm{Im}\,\zeta| < 1\}.$$

$\Gamma = \partial\Omega$ と書き，正の向きを付ける．任意の $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，命題 8.5 から次が従う．

$$\mathrm{spec}(A) \cup \mathrm{spec}(A_j) \subset [-D, D]. \tag{8.38}$$

L の選び方から，次が従う．

$$\Gamma \cap [-D, D] \subset \{-a, a\}. \tag{8.39}$$

(8.39)を(8.37)および(8.38)と合わせると，任意の $j \geq j_0$ について次を得る．

$$\Gamma \cap \big(\mathrm{spec}(A) \cup \mathrm{spec}(A_j)\big) = \emptyset. \tag{8.40}$$

さらに，

$$\mathrm{spec}(A) \cap \Omega = \{\lambda \in \mathrm{spec}(A) \mid |\lambda| > a\}, \tag{8.41}$$

および

$$\mathrm{spec}(A_j) \cap \Omega = \{\lambda \in \mathrm{spec}(A_j) \mid |\lambda| > a\}, \tag{8.42}$$

および

$$0 \notin \overline{\Omega}. \tag{8.43}$$

が成り立つ．(8.40)により，十分大きいすべての添字について，両作用素に同じ境界を用いる．(8.41)と(8.42)は，この境界が，絶対値が a より大きい固有値だけを囲むことを示す．図 4 に，この境界の二つの成分を示す．

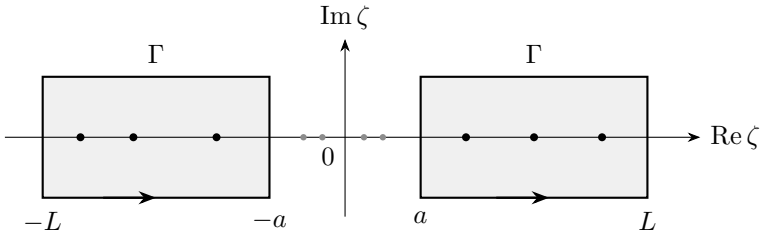


図 4. 正の向きを付けた境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は，保持する正と負のスペクトル値を囲む．点は模式的に示したものである．$\pm a$ における隙間により，十分大きいすべての j に対し，A_j にも同じ境界を用いることができる．

定義 7.5 を用い，射影 $\Pi, \Pi_j \colon C(Z,\mathbb{C}) \to C(Z,\mathbb{C})$ を

$$\Pi = \Pi_\Gamma(A),$$

および

$$\Pi_j = \Pi_\Gamma(A_j).$$

で定める．すなわち，$f \in C(Z,\mathbb{C})$ と固定した各 $z \in Z$ に対して次が成り立つ．

$$(\Pi f)(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma \bigl[(\zeta\,\mathrm{id} - A)^{-1} f\bigr](z)\, d\zeta. \tag{8.44}$$

点 $z \in Z$ を固定したまま，積分変数 ζ は境界 Γ 上を動く．z における評価は $C(Z,\mathbb{C})$ 上の有界線形汎関数なので，線積分と可換である．(8.44)において A を A_j に置き換えた等式は，Π_j に対しても成り立つ．

段階 3．像の収束と次元． 定理 7.8 により，次を得る．

$$\operatorname{range}\Pi = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{spec}(A) \cap \Omega} \mathcal{G}_\lambda(A). \tag{8.45}$$

十分大きいすべての j に対し，さらに次が成り立つ．

$$\operatorname{range}\Pi_j = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{spec}(A_j) \cap \Omega} \mathcal{G}_\lambda(A_j). \tag{8.46}$$

$0 \notin \overline{\Omega}$ なので，定理 7.3 により，これらの和は有限和である．命題 8.5 により，任意の $\lambda \in \operatorname{spec}(A) \cap \Omega$ について次が成り立つ．

$$\mathcal{G}_\lambda(A) = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id}). \tag{8.47}$$

十分大きい任意の j と任意の $\lambda \in \operatorname{spec}(A_j) \cap \Omega$ に対し，同じ命題から次が従う．

$$\mathcal{G}_\lambda(A_j) = \ker(A_j - \lambda\,\mathrm{id}). \tag{8.48}$$

これで，固定された Banach 空間 $C(Z,\mathbb{C})$ 上で定理 7.7 を適用できる．定理 7.7 の作用素に関する仮定は，(8.34)と $\{A_j - A\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の集合的コンパ

クト性から従う．(8.40)，(8.41)，(8.42)，(8.43)により，Γ に関する仮定も満たされる．十分大きいすべての j に対し，次を得る．

$$\dim \operatorname{range} \Pi_j = \dim \operatorname{range} \Pi. \tag{8.49}$$

任意の $f \in C(Z, \mathbb{C})$ に対し，さらに次を得る．

$$\|\Pi_j f - \Pi f\|_\infty \to 0. \tag{8.50}$$

$0 \notin \overline{\Omega}$ なので，次元は有限である．(8.50)の収束は，各関数 $f \in C(Z, \mathbb{C})$ を固定したときの，Z 上の一様収束を意味する．

次に，$C(Z, \mathbb{C})$ 上の射影と距離作用素のスペクトル部分空間を比較する．$Y = X$，または十分大きい j に対して $Y = X_j$ とし，$\Pi_X = \Pi$ および $\Pi_{X_j} = \Pi_j$ と書く．(8.41)と(8.42)により，Ω に含まれる $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ はちょうど $|\lambda| > a$ を満たすものであり，そこに含まれる $\lambda \in \operatorname{spec}(A_j)$ はちょうど $|\lambda| > a$ を満たすものである．命題 8.6 から，次の複素線形同型が得られる．

$$\mathsf{R}_Y \colon \operatorname{range} \Pi_Y \to V_{Y,a} + \sqrt{-1} V_{Y,a}.$$

右辺の空間は実空間 $V_{Y,a}$ の複素化であり，その複素次元は $\dim_{\mathbb{R}} V_{Y,a}$ に等しい．したがって，(8.49)の次元の等式から次が従う．

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} V_{X_j,a} &= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{range} \Pi_j = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{range} \Pi \\ &= \dim_{\mathbb{R}} V_{X,a} = n. \end{aligned} \tag{8.51}$$

最後に，X と，十分大きいすべての j に対する X_j に命題 8.6 を適用すると，Π と Π_j が実数値関数を保つことが分かる． □

定理 8.8. X_j, X をコンパクト距離空間 (Z, h) のコンパクト部分集合とし，制限距離を

$$d_j = h|_{X_j \times X_j},$$

および

$$d = h|_{X \times X},$$

とする．さらに，

$$\mathcal{H}[h](X_j, X) \to 0,$$

が成り立つとし，$\iota_j \colon X_j \hookrightarrow Z$ と $\iota \colon X \hookrightarrow Z$ を包含写像とする．Z 上の確率測度を $\bar{\mu}_j = (\iota_j)_* \mathfrak{m}_{X_j,d_j}$ および $\bar{\mu} = \iota_* \mathfrak{m}_{X,d}$ で定める．$a, -a \notin \operatorname{spec}(T_{X,d})$ を満たす $a > 0$ を固定する．$n = \dim V_{X,a}$ とおく．$j_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し，任意の $j \geq j_0$ について

$$a, -a \notin \operatorname{spec}(T_{X_j,d_j}), \tag{8.52}$$

および

$$\dim V_{X_j,a} = n. \tag{8.53}$$

が成り立つ．$n > 0$ のとき，$V_{X,a}$ の任意の実正規直交基底 $\{\psi_k\}_{0 \leq k < n}$ を固定する．固定された基底 $\{\psi_k\}_{0 \leq k < n}$ と列 $\{(X_j, \bar{\mu}_j)\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対し，必要ならば j_0 を増やす．このとき，次の関数族

$$\{\psi_{j,k} \colon X_j \to \mathbb{R}\}_{j \geq j_0, 0 \leq k < n},$$

$$\{\widehat{\psi}_{j,k} \colon Z \to \mathbb{R}\}_{j \geq j_0, 0 \leq k < n},$$

および

$$\{\widehat{\psi}_k \colon Z \to \mathbb{R}\}_{0 \le k < n}$$

が存在し，以下の性質を持つ．

(B1) 任意の $j \ge j_0$ に対し，族 $\{\psi_{j,k}\}_{0 \le k < n}$ は $V_{X_j,a}$ の実正規直交基底である．

(B2) 任意の $j \ge j_0$ と $0 \le k < n$ に対し，関数 $\widehat{\psi}_{j,k}, \widehat{\psi}_k \colon Z \to \mathbb{R}$ は連続であり，

$$\widehat{\psi}_{j,k}|_{X_j} = \psi_{j,k},$$

および

$$\widehat{\psi}_k|_X = \psi_k.$$

を満たす．

(B3) これらの拡張は，さらに次を満たす．

$$\max_{0 \le k < n} \|\widehat{\psi}_{j,k} - \widehat{\psi}_k\|_\infty \longrightarrow 0. \tag{8.54}$$

(B4)

$$\sup_{(x,y) \in R_j} h(x,y) \longrightarrow 0,$$

を満たす任意の対応の列 $\{R_j \subset X_j \times X\}_{j \ge j_0}$ に対し，基底 $\{\psi_{j,k}\}_{0 \le k < n}$ と $\{\psi_k\}_{0 \le k < n}$ は次を満たす．

$$\max_{0 \le k < n} \sup_{(x,y) \in R_j} |\psi_{j,k}(x) - \psi_k(y)| \longrightarrow 0. \tag{8.55}$$

証明．包含写像 ι_j と ι に定理 5.9(M3) を適用すると，$\bar{\mu}_j \to \bar{\mu}$ が弱収束する．命題 8.7 により，(8.52)と(8.53)を得る．その命題で構成した射影を Π_j, Π とする．$n = 0$ のとき，十分先のスペクトル部分空間は零であり，基底や拡張のデータは不要である．$n > 0$ と仮定する．(B1) における $V_{X_j,a}$ の実正規直交基底 $\{\psi_{j,k}\}_{0 \le k < n}$ を構成するため，まず，指定された基底 $\{\psi_k\}_{0 \le k < n}$ の連続拡張を射影する．得られた関数は，変化する測度 $\mathfrak{m}_{X_j,d_j}$ に関して正規直交しているとは限らない．Gram 行列を用い，極限を変えずにこれらの関数を正規化する．次に，正規化した拡張について (B2) と (B3) を確認し，一様連続性から (B4) を導く．

段階 1. 射影した拡張と Gram 行列の収束. 任意の整数 $0 \le k < n$ に対し, Tietze–Urysohn の定理 (定理 2.23) を用い, 指定された関数 $\psi_k \colon X \to \mathbb{R}$ の連続な実数値拡張 $\widetilde{\psi}_k \colon Z \to \mathbb{R}$ を選ぶ．十分大きい任意の $j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ と任意の整数 $0 \le k < n$ に対し，次のようにおく．

$$u_{j,k} = \Pi_j \widetilde{\psi}_k.$$

任意の整数 $0 \le k < n$ に対し，次のようにおく．

$$u_k = \Pi \widetilde{\psi}_k.$$

各関数 $\widetilde{\psi}_k$ を固定して(8.50)を適用すると，任意の $0 \le k < n$ について $\|u_{j,k} - u_k\|_\infty \to 0$ を得る．さらに，(8.33)から次が従う．

$$\mathsf{R}_X u_k = P_{X,a} \mathsf{R}_X \widetilde{\psi}_k = P_{X,a} \psi_k = \psi_k.$$

よって，$u_k|_X = \psi_k$ である．X_j 上の(8.33)により，次が分かる．

$$u_{j,k}|_{X_j} = P_{X_j,a}(\widetilde{\psi}_k|_{X_j}) \in V_{X_j,a}.$$

$z \in Z$ を積分変数とし，実 Gram 行列を次で定める．

$$G_j = \left(\int_Z u_{j,k}(z) u_{j,l}(z)\, d\bar{\mu}_j(z) \right)_{0 \le k,l < n}.$$

任意の整数の組 $0 \le k, l < n$ に対し，積 $u_{j,k}u_{j,l}$ は，Z 上一様に $u_k u_l$ に収束する．$u_k|_X = \psi_k$ であり，指定された基底は正規直交基底なので，次が成り立つ．

$$\int_Z u_k(z) u_l(z)\, d\bar{\mu}(z) = \delta_{kl}.$$

十分大きい任意の j と任意の整数の組 $0 \le k, l < n$ に対し，積の一様誤差を次で定める．

$$a_{j,k,l} = \|u_{j,k}u_{j,l} - u_k u_l\|_\infty. \tag{8.56}$$

同じ添字に対し，固定された極限の積の積分誤差を次で定める．

$$\begin{aligned} b_{j,k,l} &= \left| \int_Z u_k(z) u_l(z)\, d\bar{\mu}_j(z) - \int_Z u_k(z) u_l(z)\, d\bar{\mu}(z) \right| \\ &= \left| \int_Z u_k(z) u_l(z)\, d\bar{\mu}_j(z) - \delta_{kl} \right|. \end{aligned} \tag{8.57}$$

$\bar{\mu}_j(Z) = 1$ なので，次が成り立つ．

$$|(G_j)_{kl} - \delta_{kl}| \le a_{j,k,l} + b_{j,k,l}. \tag{8.58}$$

各 $0 \le k, l < n$ を固定すると，積の一様収束により(8.56)で $a_{j,k,l} \to 0$ となり，$\bar{\mu}_j$ の $\bar{\mu}$ への弱収束により(8.57)で $b_{j,k,l} \to 0$ となる．(8.58)により，次が成り立つ．

$$(G_j)_{kl} \to \int_Z u_k(z) u_l(z)\, d\bar{\mu}(z) = \delta_{kl}.$$

よって，$G_j \to I_n$ となる．そこで，任意の $j \ge j_0$ に対し行列 G_j が正定値となるように $j_0 \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を選ぶ．

段階 2．逆平方根による正規化． Gram 行列の逆平方根が単位行列に収束することを証明する．定理 7.9 により，正規直交固有基底で各正の固有値をその逆平方根に置き換えることで，$G_j^{-1/2}$ が定まる．実 $n \times n$ 行列 M に対し，その Euclid 作用素ノルムを次で表す．

$$\|M\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \\ \|c\|_2 = 1}} \|Mc\|_2.$$

十分大きい任意の $j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し，次のようにおく．

$$\varepsilon_j = \|G_j - I_n\|_{\mathrm{op}}.$$

各成分の収束から $\varepsilon_j \to 0$ が従う．必要ならば j_0 を増やし，任意の $j \ge j_0$ に対して次が成り立つようにする．

$$0 \le \varepsilon_j < 1.$$

$j \geq j_0$ を固定する.G_j は実対称なので,定理 7.9 により,任意の $\lambda \in \mathrm{spec}(G_j)$ は実数であり，$\|c\|_2 = 1$ を満たす固有ベクトル $c \in \mathbb{R}^n$ を持つ．このような λ と c に対し，次が成り立つ．

$$|\lambda - 1| = \|(G_j - I_n)c\|_2 \leq \|G_j - I_n\|_{\mathrm{op}}\|c\|_2 = \varepsilon_j.$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ かつ $\varepsilon_j < 1$ なので，次が従う．

$$\mathrm{spec}(G_j) \subset [1 - \varepsilon_j, 1 + \varepsilon_j] \subset (0, \infty).$$

これらの添字 j について，定理 7.9 から次が従う．

$$\begin{aligned}\|G_j^{-1/2} - I_n\|_{\mathrm{op}} &= \max_{\lambda \in \mathrm{spec}(G_j)} |\lambda^{-1/2} - 1| \leq \max_{1-\varepsilon_j \leq t \leq 1+\varepsilon_j} |t^{-1/2} - 1| \\ &= \max_{1-\varepsilon_j \leq t \leq 1+\varepsilon_j} \frac{|t-1|}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \\ &\leq \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{1-\varepsilon_j}(1+\sqrt{1-\varepsilon_j})} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

したがって，次が成り立つ．

$$G_j^{-1/2} \xrightarrow[j\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathrm{op}}} I_n.$$

任意の $j \geq j_0$ と $z \in Z$ に対し，行ベクトル値写像

$$\boldsymbol{u}_j \colon Z \to \mathbb{R}^{1\times n}$$

を次で定める．

$$\boldsymbol{u}_j(z) = (u_{j,0}(z), \ldots, u_{j,n-1}(z)).$$

この行ベクトルに行列 $G_j^{-1/2}$ を右から掛け，次のように定める．

$$\big(\widetilde{\psi}_{j,0}(z), \ldots, \widetilde{\psi}_{j,n-1}(z)\big) = \boldsymbol{u}_j(z)G_j^{-1/2}. \tag{8.59}$$

任意の整数 $0 \leq k < n$ に対し，(8.59)の成分は

$$\widetilde{\psi}_{j,k}(z) = \sum_{l=0}^{n-1} u_{j,l}(z)(G_j^{-1/2})_{lk},$$

および

$$\psi_{j,k} = \widetilde{\psi}_{j,k}|_{X_j}.$$

を満たす．$G_j^{-1/2}$ は対称なので，これらの制限の Gram 行列は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\int_Z \big(\boldsymbol{u}_j(z)G_j^{-1/2}\big)^{\mathsf{T}}\big(\boldsymbol{u}_j(z)G_j^{-1/2}\big)\, d\bar{\mu}_j(z) \\ &= (G_j^{-1/2})^{\mathsf{T}} G_j G_j^{-1/2} \\ &= G_j^{-1/2} G_j G_j^{-1/2} = I_n.\end{aligned} \tag{8.60}$$

(8.33)により，関数 $\psi_{j,k}$ は $V_{X_j,a}$ に属する．(8.60)から正規直交性が示され，その個数は $\dim V_{X_j,a}$ に等しいので，$V_{X_j,a}$ の正規直交基底をなす．これで (B1) が示された．

段階 3．連続拡張と収束．任意の $j \geq j_0$ と任意の整数 $0 \leq k < n$ に対し，$\widehat{\psi}_{j,k} = \widetilde{\psi}_{j,k}$ および $\widehat{\psi}_k = u_k$ とおく．射影は実数値関数を保つので，段階 1 の構成と(8.59)の有限線形結合から，これらの関数は実数値かつ連続である．制限の等式は，段階 1 と，段階 2 における $\psi_{j,k}$ の定義から従う．これで (B2) が示された．次に，(B3) を証明する．段階 1 における射影した基底関数の一様収束，収束 $G_j^{-1/2} \to I_n$，および(8.59)から，任意の整数 $0 \leq k < n$ について次が従う．

$$\|\widetilde{\psi}_{j,k} - u_k\|_\infty \longrightarrow 0.$$

基底の添字は有限個なので，次が従う．

$$\max_{0 \leq k < n} \|\widetilde{\psi}_{j,k} - u_k\|_\infty \longrightarrow 0.$$

拡張の定義により，

$$\max_{0 \leq k < n} \|\widehat{\psi}_{j,k} - \widehat{\psi}_k\|_\infty = \max_{0 \leq k < n} \|\widetilde{\psi}_{j,k} - u_k\|_\infty \longrightarrow 0,$$

となり，(B3) が示される．最後に，$R_j \subset X_j \times X$ を，(B4) の仮定を満たす対応の列とする．任意の $j \geq j_0$ に対し，次のようにおく．

$$\delta_j = \sup_{(x,y) \in R_j} h(x,y).$$

任意の整数 $0 \leq k < n$ に対し，(B2) の制限の等式から次が従う．

$$\sup_{(x,y) \in R_j} |\psi_{j,k}(x) - \psi_k(y)| \leq \|\widetilde{\psi}_{j,k} - u_k\|_\infty + \sup_{\substack{z,z_0 \in Z \\ h(z,z_0) \leq \delta_j}} |u_k(z) - u_k(z_0)|. \quad (8.61)$$

(8.61)のノルムの項を基底の添字について最大にしたものは，(B3) と拡張の定義により 0 に収束する．各 $0 \leq k < n$ に対し，コンパクト空間 Z 上の u_k の一様連続性と $\delta_j \to 0$ から，次の収束が従う．基底の添字は有限個なので，この最大値は 0 に収束する．

$$\max_{0 \leq k < n} \sup_{\substack{z,z_0 \in Z \\ h(z,z_0) \leq \delta_j}} |u_k(z) - u_k(z_0)| \longrightarrow 0.$$

ここで，(8.61)を基底の添字について最大にすると，

$$\max_{0 \leq k < n} \sup_{(x,y) \in R_j} |\psi_{j,k}(x) - \psi_k(y)| \longrightarrow 0,$$

を得て，(B4) が示される． □

8.4. **ノルム空間への局所写像．**ここで，スペクトル部分空間を $\mathbb{R}^n$ 内の座標に変換する．正規直交基底を選ぶと座標が定まるが，得られる擬距離はこの選択によらない．

$\mathbb{R}^n$ の列ベクトルに作用する直交群

$$O(n) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid g^{\mathsf{T}} g = I_n\},$$

を用いる．したがって，g は Euclid ノルムを保ち，$g^{-1} = g^{\mathsf{T}}$ である．

正規直交基底の変更によってモデルが変わらないように，座標写像とそのノルムの同値類を考える．

定義 8.9. Y を空でないコンパクト空間とし，$n \geq 1$ とする．次のように書く．

$$\mathcal{N}_n = \{N \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty) \mid N\text{はノルム}\}.$$

群 $O(n)$ は，$C(Y,\mathbb{R}^n) \times \mathcal{N}_n$ に次のように作用する．

$$g \cdot (\mathbf{v}, N) = (g \circ \mathbf{v}, N \circ g^{-1}). \tag{8.62}$$

商集合

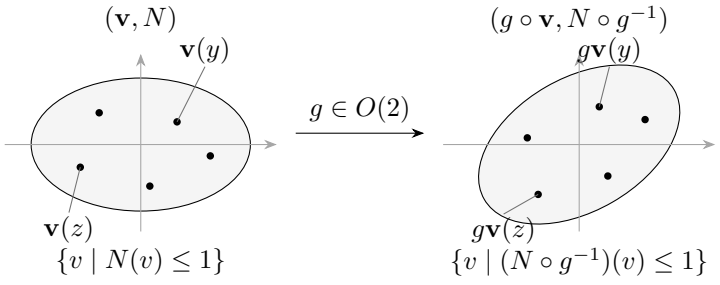
$$\mathfrak{C}_n(Y) = \big(C(Y,\mathbb{R}^n) \times \mathcal{N}_n\big)/O(n) \tag{8.63}$$

の元を，Y 上の n 次元ノルム付き座標類という．組 $(\mathbf{v}, N)$ の類を $[\mathbf{v}, N]_{O(n)}$ で表す．

整数 $n \geq 1$，空でないコンパクト空間 Y，連続写像 $\mathbf{v} \colon Y \to \mathbb{R}^n$，ノルム $N \in \mathcal{N}_n$，および点 $y, z \in Y$ に対し，次のようにおく．

$$q(y,z) = N(\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(z)).$$

この式は Y 上の連続擬距離を定める．この擬距離は(8.62)によって変わらない．したがって，ノルム付き座標類のみに依存する．座標類は具体的な台集合上で定められる．異なる台集合上の類を比較するため，定理 8.11 における入力の等長写像との両立性を用いる．その定理では，固定された中心の近傍内の各コンパクト距離空間について，このような類を構成する．それを代表する座標の組は，空間の各収束列に沿って収束するように選べる．第 11 節では，これらの線形座標を用い，1 の分割によって近似を組み合わせる．図 5 に，(8.62)による不変性を示す．



$$(N \circ g^{-1})\big(g\mathbf{v}(y) - g\mathbf{v}(z)\big) = N\big(\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(z)\big)$$

図 5. 座標の直交変換は，座標の像とノルムの単位球の双方に作用する．点は 2 次元の有限な座標の像を表し，網掛けした領域は二つの単位球を表す．これらを同時に回転しても，誘導される擬距離は変わらない．

補題 8.10. X, Y を空でないコンパクト空間とし，$R \subset X \times Y$ を対応とし，$n \geq 1$ とする．$\mathbf{v}_0 \colon X \to \mathbb{R}^n$ と $\mathbf{v}_1 \colon Y \to \mathbb{R}^n$ を連続とし，N_0, N_1 を $\mathbb{R}^n$ 上のノルムとする．それぞれが誘導する擬距離を q_0 と q_1 で表す．

$$M = \sup_{x \in X} \|\mathbf{v}_0(x)\|_2,$$
$$\delta = \sup_{(x,y) \in R} \|\mathbf{v}_0(x) - \mathbf{v}_1(y)\|_2,$$
$$\eta = \sup_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \\ \|c\|_2 = 1}} |N_0(c) - N_1(c)|,$$

および

$$L = \max_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \\ \|c\|_2 = 1}} N_1(c).$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

$$\Delta_R(q_0, q_1) \leq 2M\eta + 2L\delta. \tag{8.64}$$

証明．$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in R$ を固定し，

$$v = \mathbf{v}_0(x_0) - \mathbf{v}_0(x_1),$$

および

$$w = \mathbf{v}_1(y_0) - \mathbf{v}_1(y_1).$$

とおく．このとき，$\|v\|_2 \leq 2M$ および $\|v - w\|_2 \leq 2\delta$ である．斉次性とノルムの三角不等式から次が従う．

$$\begin{aligned} |N_0(v) - N_1(w)| &\leq |N_0(v) - N_1(v)| + N_1(v - w) \\ &\leq \eta \|v\|_2 + L\|v - w\|_2 \\ &\leq 2M\eta + 2L\delta. \end{aligned}$$

二つの組について上限を取れば，(8.64)が示される． □

関数が GH 等長類上で定義されているとき，(Y, e) での値とは，その代表の等長類 $[Y, e]$ での値を意味する．特に，この規約は誤差関数にも適用する．

定理 8.11. $(X, d) \in \mathcal{M}$ を空でないコンパクト距離空間とし，$b > 0$ とする．このとき，$(X, d) \in \mathcal{W}$ を満たす開部分集合 $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$，整数 $n \geq 1$，連続関数 $\mathcal{E}\mathrm{rr} \colon \mathcal{W} \to [0, \infty)$，および以下の同時の選択が存在する．等長類が $\mathcal{W}$ に属する各具体的なコンパクト距離空間 (Y, e) に対し，類

$$\mathfrak{c}_{Y,e} \in \mathfrak{C}_n(Y).$$

を選ぶ．これらの選択は，以下の性質を満たす．

(A1) このような各コンパクト距離空間 (Y, e) に対し，割り当てられた類は次を満たす．

$$\mathfrak{c}_{Y,e} \in \mathfrak{C}_n(Y).$$

(A3) および (A5)–(A9) において，$(\mathbf{v}_Y, N_Y)$ はこの類に属する任意の座標の組を表す．(A3) の評価と，(A5)–(A9) の擬距離および

誤差についての主張は，この類のすべての座標の組について成り立つ．

(A2) 等長類が $\mathcal{W}$ に属するコンパクト距離空間の間の任意の等長写像 $u\colon (Y,e)\to(Y_0,e_0)$ と，割り当てられた二つの座標類の座標の組 $(\mathbf{v}_Y,N_Y)$ および $(\mathbf{v}_{Y_0},N_{Y_0})$ の任意の選択に対し，$g\in O(n)$ が存在し，

$$\mathbf{v}_{Y_0}\circ u=g\circ\mathbf{v}_Y, \tag{8.65}$$

および

$$N_{Y_0}=N_Y\circ g^{-1}. \tag{8.66}$$

が成り立つ．

(A3) 任意の $y\in Y$ に対し，次が成り立つ．

$$N_Y(\mathbf{v}_Y(y))\le 2\operatorname{diam}(Y,e).$$

(A4) $\{(Y_j,e_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ を，等長類が $\mathcal{W}$ に属するコンパクト距離空間の列とし，(Y,e) を，等長類が $\mathcal{W}$ に属するコンパクト距離空間とする．これらの空間がコンパクト空間 (Z,h) への等長埋め込みを持ち，$\mathcal{H}[h](Y_j,Y)\to 0$ が成り立つと仮定する．このとき，座標の組 $(\mathbf{v}_Y,N_Y)$ と座標の組の族 $\{(\mathbf{v}_{Y_j},N_{Y_j})\}_{j\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ が存在し，

$$(\mathbf{v}_Y,N_Y)\in\mathfrak{c}_{Y,e},$$

および

$$(\mathbf{v}_{Y_j},N_{Y_j})\in\mathfrak{c}_{Y_j,e_j},$$

および

$$\sup_{\substack{c\in\mathbb{R}^n\\ \|c\|_2=1}}|N_{Y_j}(c)-N_Y(c)|\to 0.$$

が成り立つ．これらの座標の組は，指定された列と周囲空間への埋め込みだけを用い，周囲空間内の変位が零に収束する対応の列の選択によらずに選べる．

$$\sup_{(x,y)\in R_j}h(x,y)\to 0,$$

を満たす任意の対応の列 $R_j\subset Y_j\times Y$ に対し，座標写像 $\mathbf{v}_{Y_j}$ と $\mathbf{v}_Y$ は次を満たす．

$$\sup_{(x,y)\in R_j}\|\mathbf{v}_{Y_j}(x)-\mathbf{v}_Y(y)\|_2\to 0. \tag{8.67}$$

(A5) $y,z\in Y$ に対し，式

$$q_Y(y,z)=N_Y(\mathbf{v}_Y(y)-\mathbf{v}_Y(z)) \tag{8.68}$$

は Y 上の連続擬距離を定める．

(A6) 等長類が $\mathcal{W}$ に属するコンパクト距離空間の間の任意の等長写像 $u\colon (Y,e)\to(Y_0,e_0)$ と任意の $y,z\in Y$ に対し，次が成り立つ．

$$q_{Y_0}(u(y),u(z))=q_Y(y,z).$$

(A7) $\mathcal{W}$ 内の類の各コンパクト距離代表 (Y,e) に対し，誤差関数は次を満たす．

$$\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e) = \sup_{y,z\in Y} |q_Y(y,z) - e(y,z)|.$$

(A6) により，この値は代表にも座標の組にも依存しない．

(A8) 誤差関数 $\mathcal{E}\mathrm{rr}$ は連続である．

(A9) 中心において，$\mathcal{E}\mathrm{rr}(X,d) < b$ を満たす．

類が $\mathcal{W}$ に属する各具体的なコンパクト距離空間 (Y,e) に，類

$$\mathcal{L}_{Y,e} = \mathfrak{c}_{Y,e} \in \mathfrak{C}_n(Y).$$

を対応させる選択規則を $\mathcal{L}$ で表す．データ

$$\mathfrak{M} = (\mathcal{W}, n, \mathcal{L}, \mathcal{E}\mathrm{rr})$$

を局所モデルという．条件 (A2) は，これらの値が等長写像によってどのように移されるかを述べている．条件 (A4) は，指定された各列とその周囲空間への埋め込みに対し，収束する座標の組の族が存在することを述べている．これらの組は $\mathfrak{M}$ の類を代表する．条件 (A6)–(A8) により，規則

$$(Y,e) \longmapsto [Y, q_Y]$$

は，矛盾なく定まる写像 $\mathcal{W} \to \mathcal{M}$ を誘導する．誤差関数 $\mathcal{E}\mathrm{rr}$ も，(A7) により，等長類上でそれ自体として矛盾なく定まる．写像 $\mathbf{v}_Y$ は単射とは限らないので，q_Y は擬距離である．

証明．中心が一点空間の場合，各 $(Y,e) \in \mathcal{M}$ に対し，$n=1$，$N_Y = |\cdot|$，$\mathbf{v}_Y = 0$ とおく．$\mathfrak{c}_{Y,e} = [(0, |\cdot|)]_{O(1)}$ と定める．このとき，$q_Y = 0$ および $\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e) = \mathrm{diam}(Y,e)$ である．直径は $\mathcal{GH}$ に関して連続なので，誤差は連続である．指定された $b > 0$ に対し，その定義域を開近傍

$$\mathcal{W} = \{(Y,e) \in \mathcal{M} \mid \mathrm{diam}(Y,e) < b\} \ni *.$$

とすることができる．この定義域上では，零写像と固定されたノルムが (A3)–(A9) を満たし，誤差は直径に等しい．座標写像 $\mathbf{v}_Y$ は零であり，ノルム N_Y は固定されているので，座標と等長写像についての等式も成り立つ．これで，中心が一点空間の場合の定理が示された．

以下では，中心が一点空間でないと仮定する．一つの正の実数 a から局所データを構成し，まず各台集合上の連続性を，次に台集合が変化するときの連続性を証明し，最後に不変性と誤差評価を確認する．

段階 1．スペクトル部分空間の次元が一定の近傍． $D = \mathrm{diam}(X,d)$ とおく．任意の $r > 0$ に対し，補題 8.4 と同様に $c_r = \inf_{x\in X} \mathfrak{m}_{X,d}(B(x,r;d))$ とおく．(8.15)を用い，次のようにパラメータを選ぶ．まず $r > 0$ を十分小さく選ぶ．次に $2 \le p < \infty$ を十分大きく選ぶ．最後に，(X,d) について次を満たすように，$\eta > 0$ を十分小さく選び，対応する正の実数 a を選ぶ．

$$\|q_X - d\|_\infty \le 2\eta + D(1 - c_r^{1/p}) + 2r < b,$$
$$a, -a \notin \mathrm{spec}(T_{X,d}), \qquad \dim V_{X,a} = n \ge 1.$$

次のように定める．

$$\mathcal{W} = \{(Y, e) \in \mathcal{M} \mid a, -a \notin \operatorname{spec}(T_{Y,e}),\ \dim V_{Y,a} = n\}.$$

このとき $(X, d) \in \mathcal{W}$ である．$\mathcal{W}$ が開いていることを示す．(Y_j, e_j) が $\mathcal{M}$ において $(Y, e) \in \mathcal{W}$ に収束するとする．定理 2.8 により，この列と極限を，共通のコンパクト距離空間 (Z, h) のコンパクト部分集合として実現し，次を満たすようにできる．

$$\mathcal{H}[h](Y_j, Y) \to 0.$$

定理 5.9 から次が従う．

$$\mathfrak{m}_{Y_j,e_j} \to \mathfrak{m}_{Y,e} \quad \text{弱収束，周囲空間：} Z.$$

命題 8.7 により，十分大きいすべての j に対して $(Y_j, e_j) \in \mathcal{W}$ が成り立つ．$\mathcal{M}$ は距離化可能なので，これで開性が示された．

段階 2．ノルムと連続座標写像． $(Y, e) \in \mathcal{W}$ に対し，$V_{Y,a}$ の実正規直交基底 $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ を選ぶ．汎関数 $N_Y \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ を次のように定める．(8.69)と(8.71)では，$z \in Y$ を積分変数とする．任意の $c \in \mathbb{R}^n$ に対し，次のようにおく．

$$N_Y(c) = \left(\int_Y \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \psi_k(z) \right|^p d\mathfrak{m}_{Y,e}(z) \right)^{1/p}. \tag{8.69}$$

$p \geq 2$ であり，測度 $\mathfrak{m}_{Y,e}$ は確率測度なので，正規直交性により，任意の $c \in \mathbb{R}^n$ について次が成り立つ．

$$N_Y(c) \geq \left\| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \psi_k \right\|_2 = \|c\|_2. \tag{8.70}$$

L^p ノルムの性質により，この汎関数は斉次であり，三角不等式を満たす．(8.70)の下側の評価から非退化性が示されるので，N_Y はノルムである．

目的関数 $\mathcal{J}_Y \colon Y \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ を次のように定める．任意の $y \in Y$ と $c \in \mathbb{R}^n$ に対し，次のようにおく．

$$\mathcal{J}_Y(y, c) = \int_Y \left| e(y, z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \psi_k(z) \right|^p d\mathfrak{m}_{Y,e}(z). \tag{8.71}$$

各 $y \in Y$ に対し，$c \mapsto \mathcal{J}_Y(y, c)$ の一意な最小化元を $\mathbf{v}_Y(y) \in \mathbb{R}^n$ と定める．これらの最小化元により写像 $\mathbf{v}_Y \colon Y \to \mathbb{R}^n$ が定まる．$L^p(Y, \mathfrak{m}_{Y,e})$ の部分空間とみなした有限次元スペクトル部分空間 $V_{Y,a}$ に定理 7.1 を適用すると，存在と一意性が従う．各 $y \in Y$ に対し，関数 $\varpi_{Y,y} \colon Y \to \mathbb{R}$ を，任意の $z \in Y$ について次のように定める．

$$\varpi_{Y,y}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{v}_Y(y))_k \psi_k(z). \tag{8.72}$$

(8.71)により，$\varpi_{Y,y}$ は $V_{Y,a}$ における $e(y, \cdot)$ の最良近似である．ベクトル $\mathbf{v}_Y(y)$ の成分は，選んだ正規直交基底 $\{\psi_k\}_{0 \leq k < n}$ に関する，この最良近似の係数である．図 6 に，この $\mathbf{v}_Y$ の構成を示す．

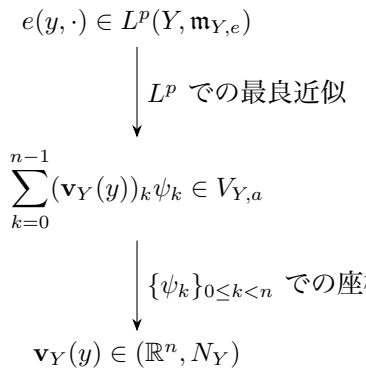


図 6. $V_{Y,a}$ における $e(y,\cdot)$ の最良近似は，選んだ L^2-正規直交基底に関して，座標ベクトル $\mathbf{v}_Y(y)$ を持つ．このベクトルは(8.71)の最小化元である．$V_{Y,a}$ に L^p ノルムを入れると，第 2 の矢印の座標写像は，(8.69)により，$(\mathbb{R}^n, N_Y)$ への全射な線形等長写像である．

各 $y \in Y$ に対し，y における距離プロファイルを $e_y = e(y,\cdot) \in C(Y)$ で表す．$\mathfrak{m}_{Y,e}$ は確率測度であり，すべての $z \in Y$ に対し $e(y,z) \le \operatorname{diam}(Y,e)$ なので，次が成り立つ．

$$\|e_y\|_p^p = \int_Y |e(y,z)|^p \, d\mathfrak{m}_{Y,e}(z) \le \operatorname{diam}(Y,e)^p \int_Y d\mathfrak{m}_{Y,e}(z) = \operatorname{diam}(Y,e)^p.$$

$\mathbf{v}_Y(y)$ の最小性により，次が成り立つ．

$$\|e_y - \varpi_{Y,y}\|_p \le \|e_y\|_p.$$

したがって，三角不等式と N_Y の定義から次を得る．

$$N_Y(\mathbf{v}_Y(y)) = \|\varpi_{Y,y}\|_p \le \|e_y\|_p + \|e_y - \varpi_{Y,y}\|_p \le 2 \operatorname{diam}(Y,e).$$

これと(8.70)の下側の評価を合わせると，次が示される．

$$\|\mathbf{v}_Y(y)\|_2 \le N_Y(\mathbf{v}_Y(y)) \le 2 \operatorname{diam}(Y,e). \tag{8.73}$$

これで (A3) が示された．特に，直径が有界ならば，最小化元は固定されたコンパクトな Euclid 球内にとどまる．

$M > 0$ に対し，次のように書く．

$$B_M = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \|c\|_2 \le M\}.$$

Y を固定すると，関数 $\mathcal{J}_Y$ は連続である．$y_l \to y$ ならば，コンパクト空間 Y と各 B_M との積上での連続性から次が従う．

$$\sup_{c \in B_M} |\mathcal{J}_Y(y_l, c) - \mathcal{J}_Y(y, c)| \to 0.$$

評価(8.73)と補題 8.3 により，$\mathbf{v}_Y$ の連続性が示される．

段階 3．目的関数とノルムの収束．指定されたコンパクトな周囲空間内で $\mathcal{H}[h](Y_j, Y) \to 0$ が成り立つと仮定する．$e_j = h|_{Y_j \times Y_j}$ および $e = h|_{Y \times Y}$

と書く．$\iota_j\colon Y_j \hookrightarrow Z$ と $\iota\colon Y \hookrightarrow Z$ を包含写像とする．$\bar{\mu}_j = (\iota_j)_*\mathfrak{m}_{Y_j,e_j}$ および $\bar{\mu} = \iota_*\mathfrak{m}_{Y,e}$ と定める．定理 5.9 により，次が成り立つ．

$$\bar{\mu}_j \to \bar{\mu} \quad \text{弱収束，周囲空間：} Z.$$

段階 2 で選んだ $V_{Y,a}$ の基底 $\{\psi_k\}_{0\le k<n}$ に，定理 8.8 を適用する．すると，$V_{Y_j,a}$ の実正規直交基底 $\{\psi_{j,k}\}_{0\le k<n}$ と連続関数 $\widetilde{\psi}_{j,k}, \widetilde{\psi}_k\colon Z \to \mathbb{R}$ を得て，

$$\widetilde{\psi}_{j,k}|_{Y_j} = \psi_{j,k},$$

および

$$\widetilde{\psi}_k|_Y = \psi_k,$$

および

$$\max_{0\le k<n} \|\widetilde{\psi}_{j,k} - \widetilde{\psi}_k\|_\infty \to 0.$$

が成り立つ．$\mathcal{J}_j, \mathcal{J}\colon Z \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ を次のように定める．以下の両積分では，w は Z 上を動く．十分大きい任意の $j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，任意の $z \in Z$，任意の $c \in \mathbb{R}^n$ に対し，次のようにおく．

$$\mathcal{J}_j(z,c) = \int_Z \left| h(z,w) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \widetilde{\psi}_{j,k}(w) \right|^p d\bar{\mu}_j(w). \tag{8.74}$$

任意の $z \in Z$ と $c \in \mathbb{R}^n$ に対し，次のようにおく．

$$\mathcal{J}(z,c) = \int_Z \left| h(z,w) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \widetilde{\psi}_k(w) \right|^p d\bar{\mu}(w). \tag{8.75}$$

(8.71)により，

$$\mathcal{J}_j|_{Y_j\times\mathbb{R}^n} = \mathcal{J}_{Y_j},$$

および

$$\mathcal{J}|_{Y\times\mathbb{R}^n} = \mathcal{J}_Y.$$

が成り立つ．任意の $M > 0$ に対し，次が成り立つ．

$$\sup_{\substack{z\in Z\\ c\in\mathbb{R}^n\\ \|c\|_2\le M}} |\mathcal{J}_j(z,c) - \mathcal{J}(z,c)| \to 0. \tag{8.76}$$

コンパクトなパラメータ空間 $Z \times \{c \in \mathbb{R}^n \mid \|c\|_2 \le M\}$ について，補題 2.17 を適用する．拡張された基底関数 $\widetilde{\psi}_{j,k}$ の $\widetilde{\psi}_k$ への一様収束により，(8.74)と(8.75)の被積分関数は，この空間と Z との積上一様収束する．ノルム N_{Y_j}, N_Y については，Euclid 単位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ をパラメータ空間とし，被積分関数 $\left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k \widetilde{\psi}_{j,k}(w)\right|^p$ に同じ補題を適用する．すると，次が従う．

$$\sup_{\substack{c\in\mathbb{R}^n\\ \|c\|_2=1}} |N_{Y_j}(c)^p - N_Y(c)^p| \to 0. \tag{8.77}$$

非負実数 s,t と $p \ge 1$ に対し，次が成り立つ．

$$|s^{1/p} - t^{1/p}| \le |s-t|^{1/p}. \tag{8.78}$$

$s = N_{Y_j}(c)^p$ および $t = N_Y(c)^p$ として(8.78)を適用する．上限を取り，(8.77)を用いると，次を得る．

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{c\in\mathbb{R}^n\\ \|c\|_2=1}} |N_{Y_j}(c) - N_Y(c)| \\ &\leq \left(\sup_{\substack{c\in\mathbb{R}^n\\ \|c\|_2=1}} |N_{Y_j}(c)^p - N_Y(c)^p| \right)^{1/p} \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{8.79}$$

段階 4. 座標写像の一様収束. 段階 3 で選んだ基底 $\{\psi_{j,k}\}_{0\leq k<n}$ と $\{\psi_k\}_{0\leq k<n}$ について，(A4) の第 2 の収束を証明する．任意の対応の列 $\{R_j\}_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を固定する．ここで，各 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $R_j \subset Y_j \times Y$ であり，次を満たすとする．

$$\sup_{(x,y)\in R_j} h(x,y) \to 0.$$

背理法のため，(8.67)が成り立たないと仮定する．$\varepsilon > 0$，狭義単調増加する添字列 n_k，および各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対する組 $(y_{n_k}, y_{0,n_k}) \in R_{n_k}$ を，次が成り立つように選ぶ．

$$\|\mathbf{v}_{Y_{n_k}}(y_{n_k}) - \mathbf{v}_Y(y_{0,n_k})\|_2 \geq \varepsilon. \tag{8.80}$$

Y のコンパクト性と(8.73)により，さらに部分列を取り，その添字を再び n_k で表す．すると，ある $y \in Y$ と $c \in \mathbb{R}^n$ について，

$$y_{0,n_k} \to y,$$

および

$$\mathbf{v}_{Y_{n_k}}(y_{n_k}) \to c.$$

を得る．対応についての条件から次が従う．

$$h(y_{n_k}, y) \leq h(y_{n_k}, y_{0,n_k}) + h(y_{0,n_k}, y) \longrightarrow 0.$$

任意の $M > 0$ を固定する．各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，目的関数の一様誤差を次で定める．

$$a_k = \sup_{\substack{z\in Z\\ c\in B_M}} |\mathcal{J}_{n_k}(z,c) - \mathcal{J}(z,c)|. \tag{8.81}$$

各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，値を取る点が動くことによる誤差を次で定める．

$$b_k = \sup_{c\in B_M} |\mathcal{J}(y_{n_k}, c) - \mathcal{J}(y,c)|. \tag{8.82}$$

(8.76)により，$a_k \to 0$ である．コンパクト集合 $Z \times B_M$ 上の $\mathcal{J}$ の一様連続性と，y_{n_k} の y への収束から，$b_k \to 0$ が従う．したがって，三角不等式により次を得る．

$$\sup_{c\in B_M} |\mathcal{J}_{n_k}(y_{n_k}, c) - \mathcal{J}(y,c)| \leq a_k + b_k \longrightarrow 0. \tag{8.83}$$

(8.83)の収束は，固定された任意の $M > 0$ について成り立つので，目的関数は $\mathbb{R}^n$ の任意のコンパクト部分集合上一様収束する．各 k に対し，ベク

トル $\mathbf{v}_{Y_{n_k}}(y_{n_k})$ は $\mathcal{J}_{n_k}(y_{n_k},\cdot)$ を最小化する．(8.73)により，すべての最小化元が B_M に含まれるように，$M>0$ を十分大きく選ぶ．(8.83)は，この球上での目的関数の一様収束を示す．極限の目的関数は一意な最小化元 $\mathbf{v}_Y(y)$ を持つ．したがって，補題 8.3 から $c=\mathbf{v}_Y(y)$ が従う．一方，$\mathbf{v}_Y$ の連続性からも $\mathbf{v}_Y(y_{0,n_k})\to\mathbf{v}_Y(y)$ が従い，(8.80)に矛盾する．これで (A4) が示された．

段階 5．基底の変換と等長写像． $g\in O(n)$ とし，$\{\widehat{\psi}_k\}_{0\le k<n}$ を，任意の $0\le k<n$ について次を満たす別の正規直交基底とする．

$$\widehat{\psi}_k=\sum_{l=0}^{n-1}g_{kl}\psi_l.$$

任意の $y\in Y$ と $c\in\mathbb{R}^n$ に対し，第 2 の基底を用いて定めた座標写像 $\widehat{\mathbf{v}}_Y$ とノルム $\widehat{N}_Y$ は

$$\widehat{\mathbf{v}}_Y(y)=g\mathbf{v}_Y(y),$$

および

$$\widehat{N}_Y(c)=N_Y(g^{-1}c).$$

を満たす．したがって，$[\mathbf{v}_Y,N_Y]_{O(n)}$ は段階 2 で用いる正規直交基底に依存しない．次のように定める．

$$\mathfrak{c}_{Y,e}=[\mathbf{v}_Y,N_Y]_{O(n)}.$$

段階 3 の基底を用いて構成した座標の組 $(\mathbf{v}_{Y_j},N_{Y_j})$ と $(\mathbf{v}_Y,N_Y)$ は，それぞれ $\mathfrak{c}_{Y_j,e_j}$ と $\mathfrak{c}_{Y,e}$ を表す．(8.79)と(8.67)に示した収束から，(A4) が従う．等長写像 $u\colon(Y,e)\to(Y_0,e_0)$ に対し，引き戻し写像

$$U\colon L^2(Y_0,\mathfrak{m}_{Y_0,e_0})\to L^2(Y,\mathfrak{m}_{Y,e})$$

を次のように定める．任意の $f\in L^2(Y_0,\mathfrak{m}_{Y_0,e_0})$ に対し，次のようにおく．

$$Uf=f\circ u.$$

$u_*\mathfrak{m}_{Y,e}=\mathfrak{m}_{Y_0,e_0}$ なので，写像 U はユニタリである．この写像は，次のように距離作用素を絡み合わせる．

$$T_{Y,e}(f\circ u)=(T_{Y_0,e_0}f)\circ u.$$

したがって，次が成り立つ．

$$U\big(V_{Y_0,a}\big)=V_{Y,a}.$$

$\{\psi_{0,k}\}_{0\le k<n}$ を Y_0 上で選んだ正規直交基底とする．$\{\psi_{0,k}\circ u\}_k$ と $\{\psi_k\}_k$ はともに $V_{Y,a}$ の正規直交基底なので，任意の $0\le k<n$ について次を満たす $g\in O(n)$ が存在する．

$$\psi_{0,k}\circ u=\sum_{l=0}^{n-1}g_{kl}\psi_l. \tag{8.84}$$

(8.84)と $u_*\mathfrak{m}_{Y,e}=\mathfrak{m}_{Y_0,e_0}$ により，任意の $y\in Y$ と $c\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$N_{Y_0}(c)=N_Y(g^{-1}c), \tag{8.85}$$

および

$$\mathcal{J}_{Y_0}(u(y), c) = \mathcal{J}_Y(y, g^{-1}c). \tag{8.86}$$

が成り立つ．任意の $y \in Y$ に対し，等式(8.86)と最小化元の一意性から次が従う．

$$\mathbf{v}_{Y_0}(u(y)) = g\mathbf{v}_Y(y).$$

これで(8.65)と(8.66)の両方の等式が示された．したがって，任意の $y, z \in Y$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} q_{Y_0}(u(y), u(z)) &= N_{Y_0}\big(g(\mathbf{v}_Y(y) - \mathbf{v}_Y(z))\big) \\ &= q_Y(y, z). \end{aligned}$$

よって，擬距離 q_Y は座標の選択によらず，(Y, e) の等長写像の下で不変である．

段階 6．近似誤差の連続性．式(8.68)は，連続写像 $\mathbf{v}_Y$ によりノルム空間の距離を引き戻すので，連続擬距離を定める．段階 5 により，その不変性が示される．

$$\eta_j = \sup_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \\ \|c\|_2 = 1}} |N_{Y_j}(c) - N_Y(c)|,$$

および

$$\delta_j = \sup_{(x,y) \in R_j} \|\mathbf{v}_{Y_j}(x) - \mathbf{v}_Y(y)\|_2.$$

とおく．段階 3 と 4 は，両者が 0 に収束することを示す．列に沿って，および極限空間上で，(8.73)のすべての座標ノルムを上から押さえる $M > 0$ を選ぶ．直径は収束するので，このような評価が存在する．補題 8.10 により，次が成り立つ．

$$\Delta_{R_j}(q_{Y_j}, q_Y) \le 2M\eta_j + 2\delta_j \max_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \\ \|c\|_2 = 1}} N_Y(c). \tag{8.87}$$

右辺は 0 に収束する．したがって，次が成り立つ．

$$\Delta_{R_j}(q_{Y_j}, q_Y) \to 0. \tag{8.88}$$

$\gamma_j = \sup_{(x,y) \in R_j} h(x, y)$ とすると，任意の $(x, y), (z, w) \in R_j$ について次が成り立つ．

$$|e_j(x, z) - e(y, w)| \le 2\gamma_j.$$

(2.4)と(8.88)により，次を得る．

$$|\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y_j, e_j) - \mathcal{E}\mathrm{rr}(Y, e)| \le \Delta_{R_j}(q_{Y_j}, q_Y) + 2\gamma_j \to 0.$$

(X, d) における評価は，段階 1 で(8.15)によって満たすようにしてある．これで (A5)–(A9) が示された． □

この構成は，各入力空間の等長写像を直交行列によって表現することもできる．

注意 8.12. 定理 8.11 の局所モデルと，$V_{Y,a}$ の実正規直交基底 $\{\psi_k\}_{0\le k<n}$ から構成した代表 $(\mathbf{v}_Y, N_Y)$ を固定する．このとき，この構成は連続群準同型

$$\rho_{Y,e}\colon \mathrm{Isom}(Y,e) \to O(n), \tag{8.89}$$

を誘導し，その行列成分は次で与えられる．任意の $\alpha \in \mathrm{Isom}(Y,e)$ と整数 $0 \le k,l < n$ に対し，次のようにおく．

$$\big(\rho_{Y,e}(\alpha)\big)_{kl} = \int_Y \psi_k(\alpha y)\psi_l(y)\, d\mathfrak{m}_{Y,e}(y). \tag{8.90}$$

実際，証明の段階 5 は，α との合成がスペクトル部分空間とその内積を保つことを示す．したがって，次が成り立つ．

$$\psi_k \circ \alpha = \sum_{l=0}^{n-1} \big(\rho_{Y,e}(\alpha)\big)_{kl}\psi_l. \tag{8.91}$$

任意の $\alpha,\beta \in \mathrm{Isom}(Y,e)$ に対し，(8.91)を α と β に順次適用し，基底係数の一意性を用いると，次が示される．

$$\rho_{Y,e}(\alpha\circ\beta) = \rho_{Y,e}(\alpha)\rho_{Y,e}(\beta).$$

(8.90)の行列成分は，等長変換群の一様位相に関して連続である．(8.65), (8.66)，および最良近似の一意性により，同変性の等式(8.92)と，ノルムを保つ等式(8.93)を得る．任意の $\alpha \in \mathrm{Isom}(Y,e)$ と $y \in Y$ に対し，次が成り立つ．

$$\mathbf{v}_Y(\alpha y) = \rho_{Y,e}(\alpha)\mathbf{v}_Y(y). \tag{8.92}$$

任意の $\alpha \in \mathrm{Isom}(Y,e)$ と $c \in \mathbb{R}^n$ に対し，次が成り立つ．

$$N_Y\big(\rho_{Y,e}(\alpha)c\big) = N_Y(c). \tag{8.93}$$

$g \in O(n)$ による基底の変更は，この表現を $\alpha \mapsto g\rho_{Y,e}(\alpha)g^{-1}$ に置き換える．一点空間を中心とするときに用いた定数モデルについては，$O(1)$ への自明な準同型を取る．コンパクト群 G に対し，Peter–Weyl の定理は，有限次元連続ユニタリ表現の行列係数が，$C(G,\mathbb{C})$ 内で稠密な線形包を持つことを述べている [19, Chapter 6, Section 2, pp. 165–167]．その証明では，畳込み作用素が左移動と可換であり，その零でない固有値の固有空間が有限次元ユニタリ表現を担う．ここでは，距離作用素が $\mathrm{Isom}(Y,e)$ の作用と可換なので，その不変スペクトル部分空間により $\rho_{Y,e}$ が定まる．定理 8.8 により，コンパクト距離空間が変化するとき，これらの部分空間を比較できる．

注意 8.13. コンパクト距離測度空間に対し，Kroshnin，Stepanov，Trevisan [38, arXiv v2, Theorem 5.4 and Remark 5.5] は，4 次の Gromov–Wasserstein 距離の最適結合を用い，直交変換に関して最小化することにより，L^2 における多次元尺度構成の座標の安定性を証明している．ここでは，その距離での収束と，保持する最後の正の固有値の後の隙間を仮定する．定理 8.11 では，距離関数の L^p 最良近似と変化するノルムを用い，距離を一様に近似する．

第 III 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 III　Gromov–Hausdorff 空間の絶対レトラクト性

概要. Gromov–Hausdorff 空間が，すべての距離化可能空間に対する絶対レトラクトであることを証明する．連続な有限次元局所近似から出発し，変化するノルムを固定された Banach 空間内で表現して，1 の分割により局所写像を組み合わせる．コンパクト群による超空間の商を用いて絶対レトラクトを構成し，それを経由して，任意に小さいホモトピー軌跡を持つ恒等写像の近似を行う．Hanner の支配定理により，絶対近傍レトラクト性を得る．Gromov–Hausdorff 空間は可縮なので，絶対レトラクトであることが従う．

キーワード. Gromov–Hausdorff 空間，絶対レトラクト，絶対拡張空間，超空間，近似.

2020 年数学主題分類. 主分類 54C55；副分類 54E35，54B20.

9. 第 III 部の序論

Gromov–Hausdorff 空間は，超空間の大域的な類似物である．固定された距離空間に対し，その空でないコンパクト部分集合の超空間には Hausdorff 距離を入れる．Gromov–Hausdorff 空間 $\mathcal{M}$ では，空でないコンパクト距離空間すべての等長類を考え，周囲の距離空間が変化することを許す．通常の，基点を指定しない Gromov–Hausdorff 距離 $\mathcal{GH}$ は，すべての共通の周囲距離空間内における等長なコピーの間の Hausdorff 距離の下限である．

Curtis [17, Theorem 1.6] は，特に，Banach 空間の空でないコンパクト部分集合の超空間に，そのノルムから定まる Hausdorff 距離を入れたものが，絶対レトラクトであり，したがって絶対近傍レトラクトであることを証明している．固定された周囲空間に対するこの結果は，大域的な空間 $\mathcal{M}$ についての類似の問題の動機となる．Antonyan [5, p. 2] は，$\mathcal{M}$ が絶対レトラクトであるかを問うている．本部では，次の定理を証明することにより，この問題に肯定的な解答を与える．

定理 9.1. 空間 $\mathcal{M}$ は，すべての距離化可能空間に対する絶対レトラクトである．

関連する結果として，Antonyan は，各正整数 n に対し，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合で表される部分空間が，Hilbert 立方体から一点を除いた空間と同相であることを示している [6, Corollary 5.3]．超空間は，Gromov–Hausdorff 測地線の研究にも現れる．Mémoli と Wan [43, arXiv v2, Theorem 1] は，任意の Gromov–Hausdorff 測地線が，一つのコンパクト距離空間のコンパクト部分集合からなる Hausdorff 測地線として実現できることを証明している．

固定された距離化可能空間上の距離について，著者は，閉部分集合の離散族上に指定された距離に対し，一様誤差評価を持つ補間定理を証明した [31, Theorem 1.1]．本論文では，拡張問題の定義域から $\mathcal{M}$ への写像を考えるので，台となるコンパクト空間はパラメータとともに変化する．局所モデルの座標の組は，定理 8.11 の (A4) におけるノルムと座標の収束を

満たすように選べる．モデルを Banach 空間に置く際には，そのノルムを保つ．これにより，1 の分割が，すべての二点間距離の誤差を制御する．

$\mathcal{M}$ が ANR であることを示すために，Hanner の支配定理（定理 10.3）を用いる．ANR のレトラクトは ANR である．Hanner の定理はこの事実を拡張し，ANR を経由する二つの写像の合成が恒等写像にホモトピックであり，各点の軌跡の直径が任意に指定した $\varepsilon > 0$ より小さければよいことを述べる．$\mathcal{M}$ については，補助となる ANR を，Banach 空間の超空間のコンパクト群作用による商として構成する．Banach 空間と群は局所モデルから得られ，この商の絶対レトラクト性は，同変超空間と軌道空間に関する Antonyan の結果から従う．

連続な誤差関数 $\rho\colon \mathcal{M} \to (0,\infty)$ を固定する．各定義域上で誤差が ρ より小さい局所モデルを選び，これらの定義域に従属する，可算局所有限な 1 の分割 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を選ぶ．各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\operatorname{supp}\lambda_i$ を含む開集合 $\mathcal{U}_i$ 上の $n_i \geq 1$ 次元局所モデルを固定する．任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と，等長類が $\mathcal{U}_i$ に属する任意のコンパクト距離代表 (Y,e) に対し，局所モデルの座標の組を選び，その点写像とノルムを次で表す．

$$\mathbf{v}_{i,Y}\colon Y \to \mathbb{R}^{n_i}, \qquad N_{i,Y}\colon \mathbb{R}^{n_i} \to [0,\infty).$$

まず，変化する局所ノルムを固定された Banach 空間内で表現する．各整数 $n \geq 1$ に対し，$\mathbb{S}^{n-1}$ を Euclid 単位球面とし，

$$E_n = C(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}),$$

とおき，一様ノルムを入れる．任意の整数 $n \geq 1$ と $\mathbb{R}^n$ 上の任意のノルム N に対し，Euclid 内積に関する双対ノルムを N^* で表す．命題 11.1 では，$v \in \mathbb{R}^n$ と $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ に対して

$$J_N(v)(u) = \frac{\langle v, u\rangle}{N^*(u)}.$$

で定められる線形等長埋め込み

$$J_N\colon (\mathbb{R}^n, N) \to E_n$$

を構成する．これらの空間を局所モデル全体にわたって ℓ^1 直和にし，対応する直交群の積をその上に作用させる．すなわち，

$$E = \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} E_{n_i} \right)_{\ell^1},$$

および

$$G = \prod_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} O(n_i).$$

とおく．各直交群は，球面の逆直交変換との前合成により，対応する関数空間に作用する．こうして得られる，コンパクト距離化可能群 G の可分 Banach 空間 E 上の作用は連続であり，線形等長写像からなる．式(11.7)により，これらの埋め込みは，局所ノルムと座標の直交変換と両立する．

E の空でないコンパクト部分集合の空間に，そのノルムが誘導する Hausdorff 距離を入れたものを $\mathcal{K}(E)$ とし，次のようにおく．

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)/G.$$

$\mathcal{A}$ の絶対レトラクト性は，Antonyan の二つの結果から従う．E は連結かつ局所連続体連結なので，彼の同変超空間定理 [3, Proposition 3.1] と訂正 [4] により，$\mathcal{K}(E)$ は同変絶対レトラクト，すなわち G-AR である（定理 10.1）．さらに，G は可算基を持つコンパクト群なので，彼の軌道空間の定理 [2, Theorem 8 and Corollary 1] から，$\mathcal{A}$ は AR であることが従う（定理 10.2）．定理 11.4 では，$\mathcal{A}$ が可分かつ距離化可能であることも証明する．特に，$\mathcal{A}$ は，$\mathcal{M}$ の恒等写像を近似する際に経由する ANR である．

1 の分割を用いて，局所的な点写像を組み合わせる．各コンパクト距離代表 (Y,e) に対し，$F_Y\colon Y \to E$ を次のように定める．任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $y \in Y$ に対し，次のようにおく．

$$\bigl(F_Y(y)\bigr)_i = \begin{cases} \lambda_i(Y,e) J_{N_{i,Y}}(\mathbf{v}_{i,Y}(y)) & \text{条件：} \lambda_i(Y,e) > 0, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

(Y,e) を固定すると，零でない座標写像は有限個しかない．したがって，F_Y は連続であり，その像 $S_Y = F_Y(Y)$ は空でないコンパクト集合である．局所基底と等長代表の変更は，S_Y を G の元によって移す．したがって，その軌道は入力の等長類から矛盾なく定まる．この構成は，等長変換群が自明な場合にも非自明な場合にも適用できる．なお，等長変換群が自明な空間は，Rouyer の結果 [49, arXiv v1, Theorems 2 and 4] により $\mathcal{M}$ 内で稠密である．軌道写像を $\mathsf{q}\colon \mathcal{K}(E) \to \mathcal{A}$ で表し，定理 11.7 において連続写像

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{A} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{M}.$$

を構成する．任意のコンパクト距離代表 (Y,e) に対し，第 1 の写像は次を満たす．

$$\Phi(Y,e) = \mathsf{q}(S_Y).$$

第 2 の写像は，空でないコンパクト部分集合 $K \subset E$ の軌道を，E のノルムが誘導する距離を備えたその等長類に写す．

定理 11.7 では，連続ホモトピー

$$Q\colon \mathcal{M} \times [0,1] \to \mathcal{M}.$$

も構成する．任意のコンパクト距離代表 (Y,e) に対し，その端点は次を満たす．

$$Q((Y,e),0) = (Y,e), \qquad Q((Y,e),1) = \Psi\Phi(Y,e).$$

任意のコンパクト距離代表 (Y,e) に対し，点の軌跡は次を満たす．

$$\operatorname{diam}_{\mathcal{GH}}\bigl\{Q((Y,e),t) \bigm| t \in [0,1]\bigr\} < \rho(Y,e). \tag{9.1}$$

各 $\varepsilon > 0$ に対し，$\rho \equiv \varepsilon$ としてこの構成を適用する．Hanner の支配定理（定理 10.3）と(9.1)から，$\mathcal{M}$ は，すべての可分距離化可能空間に対する ANR であることが従う．定理 10.4 により，この結論はすべての距離化可能空間へ拡張される．最後に，距離を比例縮小すると，$\mathcal{M}$ は一点空間に収

縮する．したがって，定理 2.26 の ANR/ANE および AR/AE の同値性と定理 10.5 を合わせると，定理 9.1 の絶対レトラクト性が従う．

他の部への依存． 第 II 部から用いる結果は定理 8.11 である．大域的な構成では，定理 8.11 の連続性の主張 (A4) と，等長写像についての等式(8.65)および(8.66)を用いる．第 I 部への依存は，定理 8.11 を通じたものである．第 IV 部では，本部で示した絶対レトラクト性と，独立に構成する離散近似を用いて，$\mathcal{M}$ が Hilbert 空間と同相であることを示す．

構成． 第 10 節では，証明で用いる同変超空間の結果，および支配定理と拡張定理を振り返る．第 11.1 小節では，変化する有限次元ノルムを，固定された Banach 空間内で，座標の直交変換と両立する形で等長に表現する．第 11.2 小節では，コンパクト群作用による超空間の商から絶対レトラクトを構成し，その軌道距離を Gromov–Hausdorff 距離と比較する．第 11.3 小節では，1 の分割を用い，局所モデルを，小さなホモトピー軌跡を持つ大域的近似へ組み合わせる．第 11.4 小節では，Hanner の定理 10.3 と 10.4 を適用し，可縮性を用いて，任意の距離化可能空間の閉部分集合からの拡張を得て，定理 11.8 を証明する．

規約と記号． すべてのコンパクト距離空間は空でないものとし，Banach 空間と Hilbert 空間は実数体上で考える．コンパクト距離空間を $\mathcal{M}$ 内の等長類と同一視する．等長写像とは，全射な等長埋め込みをいう．距離空間 (X, d) に対し，空でないコンパクト部分集合の集合に Hausdorff 距離 $\mathcal{H}[d]$ を入れたものを $\mathcal{K}(X)$ で表す．コンパクト空間が周囲の距離空間への等長埋め込みを持つとき，この空間をその像と同一視し，周囲空間の制限距離を用いる．指定された定義域上の恒等写像を id で表す．列の添字は $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ で取る．

10. 準備

この部で用いる，同変超空間に関する結果，支配定理，拡張定理を述べる．AR，ANR，AE，ANE は，定義 2.25 で定めた意味で用いる．

10.1. **同変超空間と軌道空間.** 距離化可能な G-空間とは，位相群 G の連続作用を備えた距離化可能空間をいう．距離化可能な G-空間 X と Y に対し，連続写像 $f : X \to Y$ が同変であるとは，任意の $g \in G$ と $x \in X$ について

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x).$$

が成り立つことをいう．距離化可能な G-空間 X が G-AR であるとは，距離化可能な G-空間 Y への任意の閉同変埋め込み $\iota : X \to Y$ に対し，連続な同変レトラクション $r : Y \to X$ が存在し，

$$r \circ \iota = \mathrm{id}_X .$$

が成り立つことをいう．

空間 E が局所連続体連結であるとは，任意の $x \in E$ と，$x \in O$ を満たす任意の開集合 $O \subset E$ に対し，開集合 V が存在して次が成り立つことを

いう．

$$x \in V \subset O, \qquad \forall y \in V \quad \exists C \subset E \quad \begin{cases} C\text{はコンパクトかつ連結}, \\ \{x, y\} \subset C \subset O. \end{cases}$$

Banach 空間では，V として十分小さい開球を取り，線分 $C = \{(1-t)x+ty \mid t \in [0,1]\}$ を用いればよい．

空間 E 上の群 G の作用に対し，$\mathcal{K}(E)$ 上に誘導される作用を次のように定める．任意の $g \in G$ と $S \in \mathcal{K}(E)$ に対し，次のようにおく．

$$gS = \{gv \mid v \in S\}.$$

以下の超空間定理は，[3, Proposition 3.1] と訂正 [4] による．[5, Theorem 2.3] にも述べられている．

定理 10.1 ([3, Proposition 3.1])．コンパクト群 G が，空でない連結かつ局所連続体連結な距離化可能空間 E に連続に作用するとする．このとき，*Vietoris* 位相とこの誘導された作用を備えた $\mathcal{K}(E)$ は，G-AR である．

定理 10.2 ([2, Theorem 8 and Corollary 1])．G を可算基を持つコンパクト群とし，E を距離化可能な G-AR とする．このとき，その軌道空間 E/G は，すべての距離化可能空間に対する AR である．

10.2. **支配と絶対拡張．**まず，ANR による支配を用い，すべての可分距離化可能空間に対する ANR 性を得る．可縮空間の場合には，AE 性を得る．ANR のレトラクトは ANR である．レトラクトの場合，包含写像に続けてレトラクションを取った合成は恒等写像となる．次の Hanner の定理は，この事実を拡張する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ANR とそれを経由する二つの写像，および各点の軌跡の直径がすべて ε より小さいホモトピーを選べるならば，レトラクションの等式に代えて，合成写像が恒等写像にホモトピックであることを用いてよい．

定理 10.3 ([23, Theorem 7.2(b)])．(T, r) を可分距離空間とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，可分距離化可能な ANR $\mathcal{A}$ と連続写像

$$\Phi\colon T \to \mathcal{A}, \quad \Psi\colon \mathcal{A} \to T, \quad Q\colon T \times [0,1] \to T$$

が存在し，任意の $z \in T$ について

$$Q(z,0) = z, \quad Q(z,1) = \Psi\Phi(z), \quad \operatorname{diam}_r\{Q(z,t) \mid t \in [0,1]\} < \varepsilon.$$

が成り立つと仮定する．このとき，T は，すべての可分距離化可能空間に対する ANR である．

定理 10.4 ([24, Theorem 13.4])．すべての可分距離化可能空間に対する ANR である可分距離化可能空間は，すべての距離化可能空間に対する ANR である．

定理 10.5 ([24, Theorem 12.3])．すべての距離化可能空間に対する ANE である，空でない可縮距離化可能空間は，すべての距離化可能空間に対する AE である．

11. 大域的近似による絶対拡張

定理 8.11 の局所写像を，絶対レトラクトを経由する大域的近似へ組み合わせる．1 の分割により，局所有限性のみを要求して，任意に多くの局所モデルを用いることができる．この構成を用い，拡張の定義域に次元の制限を課さずに絶対拡張性を示す．

11.1. **変化するノルムの等長表現.** 局所モデルのノルム N_Y は，コンパクト距離空間 (Y, e) とともに変化する．まず，固定された有限次元のすべてのノルムを，座標の直交変換と両立する形で，一つの Banach 空間内に表現する．

$n \geq 1$ に対し，

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|_2 = 1\},$$

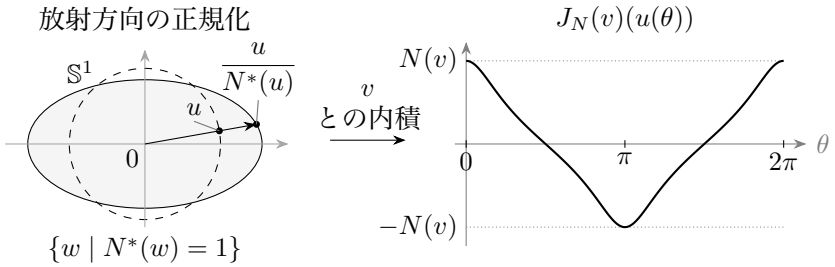
および

$$E_n = C(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}).$$

と書く．E_n には一様ノルムを入れる．$\mathbb{R}^n$ 上のノルム N に対し，$\mathbb{R}^n$ 上の双対ノルムを次のように定める．任意の $w \in \mathbb{R}^n$ に対し，次のようにおく．

$$N^*(w) = \sup\{|\langle v, w\rangle| \mid v \in \mathbb{R}^n, N(v) \leq 1\}.$$

この対は Euclid 内積である．零でない任意の $w \in \mathbb{R}^n$ に対し，$N^*(w) > 0$ である．特に，双対ノルムの $\mathbb{S}^{n-1}$ への制限は正である．図 7 に，2 次元の場合の命題 11.1 の構成を示す．



$$J_N(v)(u) = \left\langle v, \frac{u}{N^*(u)} \right\rangle, \qquad \|J_N(v)\|_\infty = N(v)$$

図 7. 双対単位球面は，固定された Euclid 球面によって，放射方向にパラメータ付けされる．図の場合，双対単位球面は楕円であり，$v = (1, 0)$ かつ $u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ である．v との内積により，$\mathbb{S}^1$ 上の連続関数が得られ，その一様ノルムは $N(v)$ である．ノルムを変えると関数は変わるが，その定義域は固定されたままである．

次の命題は，Banach–Mazur の定理の一つの具体的な形である．その線形等長写像は，双対ノルムの公式 [44, Proposition 11.21] から得られる．

命題 11.1. N を $\mathbb{R}^n$ 上のノルムとする．$v \in \mathbb{R}^n$ と $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ に対し，

$$J_N \colon (\mathbb{R}^n, N) \to (E_n, \|\cdot\|_\infty)$$

を次で定める．

$$J_N(v)(u) = \frac{\langle v, u\rangle}{N^*(u)}. \tag{11.1}$$

このとき，J_N は線形等長埋め込みである．したがって，任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対し，次が成り立つ．

$$\|J_N(v) - J_N(w)\|_\infty = N(v - w). \tag{11.2}$$

証明．双対ノルムはコンパクトな球面上で連続かつ正なので，(11.1)の式は連続関数を定める．これは v について線形である．任意の $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ に対し，双対ノルムの定義から次を得る．

$$\frac{|\langle v, u\rangle|}{N^*(u)} \le N(v).$$

$\mathbb{S}^{n-1}$ 全体で上限を取ると，次が分かる．

$$\sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\langle v, u\rangle|}{N^*(u)} \le N(v). \tag{11.3}$$

$v \neq 0$ のとき，$\ell_0\colon \operatorname{span}\{v\} \to \mathbb{R}$ を $\ell_0(tv) = tN(v)$ で定める．その作用素ノルムは次のようになる．

$$\sup_{\substack{z\in\operatorname{span}\{v\}\\ z\neq 0}} \frac{|\ell_0(z)|}{N(z)} = 1.$$

Hahn–Banach の定理 [44, Theorem 11.19 and Proposition 11.20] により，汎関数 ℓ_0 は，次を満たす汎関数 $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に拡張される．

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|\ell(z)|}{N(z)} = 1.$$

$\ell(z) = \langle z, u_0\rangle$ と書く．このとき，$N^*(u_0) = 1$ および $\langle v, u_0\rangle = N(v)$ である．任意の $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し，次が成り立つ．

$$\frac{|\langle v, cu\rangle|}{N^*(cu)} = \frac{|c|\,|\langle v, u\rangle|}{|c|\,N^*(u)} = \frac{|\langle v, u\rangle|}{N^*(u)}.$$

次のようにおく．

$$\widehat{u_0} = \frac{u_0}{\|u_0\|_2} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

このとき，次が成り立つ．

$$\sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\langle v, u\rangle|}{N^*(u)} \ge \frac{|\langle v, \widehat{u_0}\rangle|}{N^*(\widehat{u_0})} = \frac{|\langle v, u_0\rangle|}{N^*(u_0)} = N(v). \tag{11.4}$$

(11.3)の上側の評価と(11.4)の下側の評価を(11.1)と合わせると，$v \neq 0$ に対して次を得る．

$$\|J_N(v)\|_\infty = \sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\langle v, u\rangle|}{N^*(u)} = N(v).$$

$v = 0$ の場合にはこの等式は直ちに従う．したがって，線形性から(11.2)が成り立つ． □

命題 11.2. N を $\mathbb{R}^n$ 上のノルムとする．ノルム N_j が $\mathbb{S}^{n-1}$ 上で N に一様収束し，$\mathbb{R}^n$ において $v_j \to v$ ならば，次が成り立つ．

$$\|J_{N_j}(v_j) - J_N(v)\|_\infty \to 0.$$

証明．次のようにおく．

$$m = \min_{\mathbb{S}^{n-1}} N > 0.$$

次のようにおく．

$$\varepsilon_j = \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} |N_j - N|.$$

次のようにおく．

$$t_j = \varepsilon_j / m.$$

$t_j \to 0$ なので，すべての $j \geq n_0$ に対し $0 \leq t_j < 1$ となるように $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を選ぶ．任意の $j \geq n_0$ と任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対し，斉次性から次が従う．

$$(1 - t_j)N(v) \leq N_j(v) \leq (1 + t_j)N(v).$$

任意の $j \geq n_0$ と任意の $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ に対し，単位球の包含から次が従う．

$$(1 + t_j)^{-1} N^*(u) \leq N_j^*(u) \leq (1 - t_j)^{-1} N^*(u).$$

よって，双対ノルム N_j^* は球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上で N^* に一様収束し，そこで共通の正の下限を持つ．したがって，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\|J_{N_j}(v_j) - J_N(v)\|_\infty \leq \\ &\frac{\|v_j - v\|_2}{\min_{\mathbb{S}^{n-1}} N_j^*} + \|v\|_2 \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} |(N_j^*)^{-1} - (N^*)^{-1}| \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{11.5}$$

(11.5)を固定されたベクトルに適用すると，各有界集合上での一様収束も得る．任意の $M > 0$ に対し，次が成り立つ．

$$\sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|_2 \leq M}} \|J_{N_j}(v) - J_N(v)\|_\infty \leq M \sup_{\mathbb{S}^{n-1}} |(N_j^*)^{-1} - (N^*)^{-1}| \longrightarrow 0. \tag{11.6}$$

□

命題 11.3. N を $\mathbb{R}^n$ 上のノルムとする．$g \in O(n)$，$f \in E_n$，$u \in \mathbb{S}^{n-1}$ に対し，次のように定める．

$$(gf)(u) = f(g^{-1}u).$$

これにより，E_n 上に，線形等長写像による $O(n)$ の連続作用が定まる．任意の $g \in O(n)$ と $v \in \mathbb{R}^n$ に対し，次が成り立つ．

$$J_{N \circ g^{-1}}(gv) = g J_N(v). \tag{11.7}$$

証明．直交変換は Euclid 球面を保つので，$\|gf\|_\infty = \|f\|_\infty$ である．$g_j \to g$ であり，$f_j \to f$ が一様収束するならば，f の一様連続性により，次が成り立つ．

$$\|g_j f_j - gf\|_\infty \leq \|f_j - f\|_\infty + \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(g_j^{-1}u) - f(g^{-1}u)| \to 0$$

最後に，双対ノルム N^* の定義に $v = gw$ を代入すると，次が従う．

$$(N \circ g^{-1})^*(u) = N^*(g^{-1}u).$$

この等式を(11.1)に代入すると，

$$J_{N\circ g^{-1}}(gv)(u) = \frac{\langle gv, u\rangle}{N^*(g^{-1}u)} = J_N(v)(g^{-1}u),$$

を得て，(11.7)が示される． □

11.2. **超空間の軌道空間から得られる絶対レトラクト．** 式(11.7)は，座標の変更を，固定された Banach 空間の等長写像へ変換する．大域的近似では，このような空間のコンパクト部分集合を，この作用による同値を除いて用いる．定理 10.1 と 10.2 を適用し，得られる超空間の軌道空間が絶対レトラクトであることを示す．

定理 11.4. $(E, \|\cdot\|_E)$ を可分 *Banach* 空間とし，コンパクト距離化可能群 G が，線形等長写像によって E に連続に作用するとする．E に，誘導される距離 $\mathsf{d}\colon E \times E \to [0,\infty)$ を入れる．任意の $v, w \in E$ に対し，この距離は $\mathsf{d}(v,w) = \|v - w\|_E$ を満たす．このとき，軌道空間 $\mathcal{K}(E)/G$ は可分距離化可能な AR である．空でないコンパクト部分集合 $S, T \subset E$ に対し，式

$$\mathcal{OD}([S],[T]) = \min_{g\in G} \mathcal{H}[\mathsf{d}](S, gT) \tag{11.8}$$

は，商位相を誘導する距離を定める．

証明. **段階 1．絶対レトラクト性．** $\mathcal{K}(E)$ 上に誘導される作用は連続である．これを見るために，$g_j \to g$ および $\mathcal{H}[\mathsf{d}](S_j, S) \to 0$ と仮定する．このとき，次が成り立つ．

$$\mathcal{H}[\mathsf{d}](g_jS_j, gS) \le \mathcal{H}[\mathsf{d}](S_j, S) + \sup_{s\in S} \|g_j s - gs\|_E \to 0.$$

作用は連続であり，S はコンパクトなので，最後の上限は 0 に収束する．各群の元は，超空間 $\mathcal{K}(E)$ 上に等長に作用する．定理 2.1 により，Hausdorff 距離は $\mathcal{K}(E)$ 上の Vietoris 位相を誘導する．E は連結かつ局所連続体連結なので，定理 10.1 を適用できる．したがって，$\mathcal{K}(E)$ は G-AR である．コンパクト距離化可能群 G は可算基を持つので，定理 10.2 から，$\mathcal{K}(E)/G$ は距離化可能空間の圏における AR であることが従う．

段階 2．軌道距離と商位相． $S, T \subset E$ を空でないコンパクト部分集合とする．$g \mapsto \mathcal{H}[\mathsf{d}](S, gT)$ はコンパクト群 G 上で連続なので，(11.8)の最小値は存在する．

$\mathcal{K}(E)$ 上の Hausdorff 距離は G-不変であり，各軌道はコンパクトで，したがって閉じている．[47, proof of Theorem 4.3.4, p. 319] の議論（[5, p. 4, (2.1) and the preceding paragraph] も参照）により，(11.8)は商位相を誘導する距離を定める．$\mathsf{q}\colon \mathcal{K}(E) \to \mathcal{K}(E)/G$ を軌道写像とする．

E は可分なので，定理 2.1 により $\mathcal{K}(E)$ は可分である．したがって，q による連続像も可分である． □

補題 11.5. $(E, \|\cdot\|_E)$ を可分 *Banach* 空間とし，コンパクト距離化可能群 G が，線形等長写像によって E に連続に作用するとする．E に，誘導される距離 $\mathsf{d}\colon E \times E \to [0,\infty)$ を入れる．任意の $v, w \in E$ に対し，この距離は $\mathsf{d}(v,w) = \|v - w\|_E$ を満たす．$\mathcal{K}(E)/G$ に(11.8)の距離を入れる．このとき，

$$\Psi([S]) = (S, \mathsf{d}|_{S\times S}),$$

で定める写像

$$\Psi\colon \mathcal{K}(E)/G \to \mathcal{M}$$

は矛盾なく定まり，1-*Lipschitz* である．

証明. 各 $g \in G$ に対し，g を制限して得られる写像 $T \to gT$ は等長写像である．したがって，Ψ は軌道の代表によらない．任意の $g \in G$ に対し，さらに次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mathcal{GH}(\Psi([S]), \Psi([T])) &= \mathcal{GH}((S, \mathsf{d}|_{S\times S}), (gT, \mathsf{d}|_{gT\times gT})) \\ &\le \mathcal{H}[\mathsf{d}](S, gT).\end{aligned}$$

$g \in G$ 全体で最小値を取ると，Ψ が 1-Lipschitz であることが示される．□

注意 11.6. 古典的な超空間定理も，コンパクト部分集合と Hilbert 立方体を結び付ける．(X,d) を非退化 Peano 連続体，すなわち，少なくとも二点を持つ，コンパクト連結かつ局所連結な距離空間とする．Curtis と Schori [18, Theorem 3.2] は，次を証明している．

$$\big(\mathcal{K}(X), \mathcal{H}[d]\big) \text{は次と同相：} Q = [0,1]^{\mathbb{Z}_{\ge 0}}.$$

この超空間は，固定された空間 X の空でないコンパクト部分集合すべてからなる．一方，定理 11.4 の空間は，Banach 空間のコンパクト部分集合を，コンパクト群による同値を除いて考えたものである．

11.3. **小さなホモトピー軌跡を持つ大域的近似.** 次の定理では，局所モデルを組み合わせ，補助的な AR $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)/G$ を経由する近似を構成する．この軌道空間は，指定された誤差関数に対して選ぶ．$\mathcal{M}$ 上の写像について，(Y,e) での値とは，その等長類 $[Y,e]$ での値を意味する．この規約は，特に $\mathcal{E}\mathrm{rr}$ と ρ に適用する．

定理 11.7. $\rho\colon \mathcal{M} \to (0,\infty)$ を連続とする．このとき，可分距離化可能な *AR* $\mathcal{A}$，連続写像 $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ と $\Psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$，連続関数 $\mathcal{E}\mathrm{rr}\colon \mathcal{M} \to [0,\infty)$，および連続ホモトピー $Q\colon \mathcal{M} \times [0,1] \to \mathcal{M}$ が存在し，以下の性質を持つ．任意の $(Y,e) \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e) < \rho(Y,e),$$

および端点についての等式

$$Q((Y,e),0) = (Y,e), \tag{11.9}$$

および

$$Q((Y,e),1) = \Psi\Phi(Y,e). \tag{11.10}$$

が成り立つ．任意の $(Y,e)\in\mathcal{M}$ と任意の $s,t\in[0,1]$ に対し，次が成り立つ．

$$\mathcal{GH}(Q((Y,e),s),Q((Y,e),t))\le\frac{|s-t|}{2}\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e). \tag{11.11}$$

証明．局所的な被覆とその Banach 空間を構成し，大域写像を定め，続いて連続性とホモトピーの評価を証明する．

段階 1．局所モデルと 1 の分割． 各中心 $(X,d)\in\mathcal{M}$ に対し，$\rho(X,d)$ より小さい正の許容値で定理 8.11 を適用する．モデル誤差と ρ の連続性により，モデルの定義域を縮小し，その定義域内の任意の空間 (Y,e) について，モデル誤差が $\rho(Y,e)$ より小さくなるようにする．これらの定義域の族を $\mathcal{U}$ とする．このとき，$\mathcal{U}$ は $\mathcal{M}$ の開被覆である．

$\mathcal{M}$ は可分かつ距離化可能なので，$\mathcal{U}$ に従属する可算局所有限な 1 の分割 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$ を選ぶ（定理 2.22）．各添字 i に対し，定義域 $\mathcal{U}_i$ が $\operatorname{supp}\lambda_i$ を含む局所モデルを一つ固定する．異なる添字に同じ局所モデルを用いてもよい．台は局所有限族をなす．各 $i\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ に対し，選んだ局所モデルを次で表す．

$$\mathfrak{M}_i=(\mathcal{U}_i,n_i,\mathcal{L}_i,\mathcal{E}\mathrm{rr}_i).$$

すなわち，$n_i\ge1$ はその次元，$\mathcal{L}_i$ はその座標類の割当て，$\mathcal{E}\mathrm{rr}_i\colon\mathcal{U}_i\to[0,\infty)$ はその誤差関数である．等長類が $\mathcal{U}_i$ に属するコンパクト距離空間 (Y,e) に対し，$\mathcal{L}_i(Y,e)$ 内の組を選ぶ．その座標写像を $\mathbf{v}_{i,Y}\colon Y\to\mathbb{R}^{n_i}$，ノルムを $N_{i,Y}\colon\mathbb{R}^{n_i}\to[0,\infty)$ で表す．$y,z\in Y$ に対し，次のように書く．

$$q_{i,Y}(y,z)=N_{i,Y}(\mathbf{v}_{i,Y}(y)-\mathbf{v}_{i,Y}(z)).$$

モデル誤差は次を満たす．

$$\mathcal{E}\mathrm{rr}_i(Y,e)=\|e-q_{i,Y}\|_\infty<\rho(Y,e).$$

重みが零のブロックは，段階 3 で別に定める．

段階 2．コンパクト群作用を持つ Banach 空間． 可分 Banach 空間とコンパクト距離化可能群を

$$E=\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\ge0}}E_{n_i}\right)_{\ell^1}, \tag{11.12}$$

および

$$G=\prod_{i\in\mathbb{Z}_{\ge0}}O(n_i). \tag{11.13}$$

として構成する．E のノルムは $\|\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge0}}\|_E=\sum_{i\in\mathbb{Z}_{\ge0}}\|v_i\|_\infty$ である．誘導される距離

$$\mathsf{d}\colon E\times E\to[0,\infty)$$

を次のように定める．任意の $v,w\in E$ に対し，次のようにおく．

$$\mathsf{d}(v,w)=\|v-w\|_E.$$

群 G は，各直和成分に線形等長写像によって作用する．作用写像

$$G\times E\to E,\qquad(g,v)\longmapsto gv$$

が連続であることを証明する．実際，積群において $g_j \to g$ であり，$v = \{v_i\} \in E$ ならば，各 $m \geq 1$ に対し，次が成り立つ．

$$\|g_j v - gv\|_E \leq \sum_{i=0}^{m} \|(g_j)_i v_i - g_i v_i\|_\infty + 2 \sum_{i>m} \|v_i\|_\infty.$$

まず m を選んで後尾の和を制御し，次に残りの有限個のブロックの連続性を用いる．$w_j \to v$ が変化する場合，不等式

$$\|g_j w_j - gv\|_E \leq \|w_j - v\|_E + \|g_j v - gv\|_E \longrightarrow 0$$

により，積 $G \times E$ 上の作用写像の連続性が示される．

段階 3．大域写像とその誤差． $\mathcal{M}$ 内の入力類を代表するコンパクト距離空間 (Y, e) を固定する．この入力に対して有効な添字の有限集合を，次で定める．

$$\mathcal{I}(Y, e) = \{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \lambda_i(Y, e) > 0\}.$$

有限性は，1 の分割の局所有限性から従う．$\lambda_i(Y, e) > 0$ を満たす各添字に対し，割り当てられた局所モデルの座標類から，代表となる座標の組 $(\mathbf{v}_{i,Y}, N_{i,Y})$ を選ぶ．任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $y \in Y$ に対し，次のように定める．

$$B_{i,Y}(y) = \begin{cases} \lambda_i(Y, e) J_{N_{i,Y}}(\mathbf{v}_{i,Y}(y)) & \text{条件：} \lambda_i(Y, e) > 0, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

第 2 の場合の零は，E_{n_i} の零ベクトルである．これらのブロックを用い，写像 $F_Y \colon Y \to E$ を次のように定める．任意の $y \in Y$ に対し，

$$F_Y(y) = \{B_{i,Y}(y)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}, \tag{11.14}$$

とおき，その像を

$$S_Y = F_Y(Y). \tag{11.15}$$

で表す．Y の各点について，零でないブロックの添字は，同じ有限集合 $\mathcal{I}(Y, e)$ に属する．したがって，F_Y は連続であり，S_Y は空でないコンパクト集合である．式(11.2)と定理 8.11 の (A3) から，任意の $y \in Y$ について次が従う．

$$\|F_Y(y)\|_E \leq 2 \operatorname{diam}(Y, e). \tag{11.16}$$

局所的な座標の組を，(8.62)のように $g = \{g_i\}_i \in G$ によって変更すると，(11.7)により，結合した点写像は $g \circ F_Y$ に，その像は gS_Y に変換される．$u \colon (Y, e) \to (Y_0, e_0)$ が等長写像ならば，(8.65)，(8.66)，(11.7)により，ある $g \in G$ に対して次が成り立つ．

$$F_{Y_0} \circ u = g \circ F_Y.$$

したがって，どちらの変更も，コンパクトな像の軌道を変えない．よって，

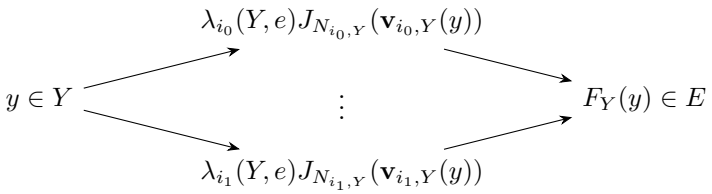
$$\Phi \colon \mathcal{M} \to \mathcal{A} = \mathcal{K}(E)/G$$

を次で定めることができる．

$$\Phi(Y, e) = [S_Y].$$

この値は，入力の等長類の代表によらない．定理 11.4 により，$\mathcal{A}$ は可分距離化可能な AR である．補題 11.5 により，1-Lipschitz 写像 $\Psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ を得る．

図 8 に，局所写像を組み合わせる方法を示す．



$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{A} = \mathcal{K}(E)/G \xrightarrow{\Psi} \mathcal{M}$$

$$\Psi\Phi \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \quad \text{ホモトピー：} Q.$$

図 8. コンパクト距離空間 (Y,e) を固定すると，有効なブロックでは同じ点 y を用いる．それらを結合した像は $S_Y = F_Y(Y)$ である．選んだ座標の組を(8.62)のように変更すると，この像は G によって移されるので，$\Phi(Y,e) = [S_Y]$ は変わらない．図の合成写像と恒等写像は，段階 5 のホモトピーで結ばれ，その軌跡は(11.11)の評価を満たす．

$y, z \in Y$ に対し，F_Y が誘導する擬距離を次で定める．

$$q_Y(y,z) = \|F_Y(y) - F_Y(z)\|_E. \tag{11.17}$$

(11.2)により，次が成り立つ．

$$q_Y(y,z) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \lambda_i(Y,e) > 0}} \lambda_i(Y,e) q_{i,Y}(y,z). \tag{11.18}$$

(11.14)の各ブロックでは，同じ点 $y \in Y$ で値を取る．誤差を次で定める．

$$\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e) = \|e - q_Y\|_\infty. \tag{11.19}$$

重みの和は 1 なので，(11.18)から次が従う．

$$\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}(Y,e)} \lambda_i(Y,e)\mathcal{E}\mathrm{rr}_i(Y,e) < \sum_{i \in \mathcal{I}(Y,e)} \lambda_i(Y,e)\rho(Y,e) = \rho(Y,e). \tag{11.20}$$

段階 4．共通の対応に沿った連続性．次に，共通の対応に沿って写像 F_Y を評価することにより，Φ と $\mathcal{E}\mathrm{rr}$ の連続性を証明する．局所有限性により，有限個のブロックだけを扱えばよい．重みの極限が正であるブロックと，重みが 0 に収束するブロックを，別々に扱う．また，評価(11.30)は，Q の連続性の証明にも用いる．

段階 4(a). 共通の対応と有限個のブロック．$\mathcal{M}$ において $(Y_j, e_j) \to (Y,e)$ とする．定理 2.8 により，すべての台集合を一つのコンパクト距離空間

(Z,h) のコンパクト部分集合とみなし，$\mathcal{H}[h](Y_j,Y)\to 0$ が成り立つようにできる．対応 $R_j\subset Y_j\times Y$ を，次を満たすように選ぶ．

$$\gamma_j=\sup_{(x,y)\in R_j} h(x,y)\longrightarrow 0.$$

すべてのブロックに，この同じ対応を用いる．台の局所有限性により，(Y,e) の開近傍 U が存在し，次が成り立つ．

$$I_0=\{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\mid U\cap\operatorname{supp}\lambda_i\neq\emptyset\}\quad\text{は有限.}$$

十分大きいすべての j に対し，$(Y_j,e_j)\in U$ である．したがって，任意の $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\setminus I_0$ について次が成り立つ．

$$\lambda_i(Y,e)=\lambda_i(Y_j,e_j)=0.$$

極限の重みに応じ，有限集合 I_0 を

$$I_+=\{i\in I_0\mid \lambda_i(Y,e)>0\}$$

および $I_-=I_0\setminus I_+$ とおいて分割する．すなわち，次のようになる．

$$I_-=\{i\in I_0\mid \lambda_i(Y,e)=0\}.$$

段階 4(b)．極限の重みが正のブロック． 各 $i\in I_+$ に対し，λ_i の連続性から次が従う．

$$\lambda_i(Y_j,e_j)\longrightarrow\lambda_i(Y,e)>0\quad\text{極限：}j\to\infty.$$

I_+ は有限なので，最初の有限個の項を除くと，任意の $i\in I_+$ と残りの任意の添字 j について，$\lambda_i(Y_j,e_j)>0$ が成り立つようにできる．したがって，各 $i\in I_+$ に対し，対応する局所モデルは (Y_j,e_j) と (Y,e) の双方で定義される．ここで，ノルムと座標写像の双方が変化するときの，$B_{i,Y}$ の定義中の因子 $J_{N_{i,Y}}\circ\mathbf{v}_{i,Y}$ の連続性を調べる．定理 8.11 の (A4) により，各 $i\in I_+$ について座標の組を選び，

$$\sup_{u\in\mathbb{S}^{n_i-1}}\bigl|N_{i,Y_j}(u)-N_{i,Y}(u)\bigr|\longrightarrow 0 \tag{11.21}$$

および

$$\sup_{(x,y)\in R_j}\|\mathbf{v}_{i,Y_j}(x)-\mathbf{v}_{i,Y}(y)\|_2\longrightarrow 0. \tag{11.22}$$

が成り立つようにする．$i\in I_+$ を固定する．十分大きい任意の j に対し，(11.22)の上限は高々 1 である．そのような添字 j を固定し，任意の点 $x\in Y_j$ を取る．第 1 座標への射影 $R_j\to Y_j$ は全射なので，$(x,y)\in R_j$ を満たす $y\in Y$ を選ぶ．この組に三角不等式を適用すると，次を得る．

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_{i,Y_j}(x)\|_2&\leq\|\mathbf{v}_{i,Y_j}(x)-\mathbf{v}_{i,Y}(y)\|_2+\|\mathbf{v}_{i,Y}(y)\|_2\\&\leq 1+\max_{z\in Y}\|\mathbf{v}_{i,Y}(z)\|_2.\end{aligned} \tag{11.23}$$

(11.23)で，すべての $x\in Y_j$ について上限を取ると，次を得る．

$$\sup_{x\in Y_j}\|\mathbf{v}_{i,Y_j}(x)\|_2\leq 1+\max_{z\in Y}\|\mathbf{v}_{i,Y}(z)\|_2. \tag{11.24}$$

次のようにおく．

$$r_i = 1 + \max_{z\in Y} \|\mathbf{v}_{i,Y}(z)\|_2 < \infty.$$

有限性は，連続性とコンパクト性から従う．(11.24)により，十分大きいすべての j について，$\mathbf{v}_{i,Y_j}$ と $\mathbf{v}_{i,Y}$ の像は，閉 Euclid 球

$$\overline{B}(0, r_i; \|\cdot\|_2) = \{v \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \|v\|_2 \le r_i\}.$$

に含まれる．$(x, y) \in R_j$ に対し，次の評価によって，ノルムの変化と座標の変化を分ける．

$$\begin{aligned}
&\Big\| J_{N_{i,Y_j}}\big(\mathbf{v}_{i,Y_j}(x)\big) - J_{N_{i,Y}}\big(\mathbf{v}_{i,Y}(y)\big) \Big\|_\infty \\
&\quad \le \Big\| \big(J_{N_{i,Y_j}} - J_{N_{i,Y}}\big)\big(\mathbf{v}_{i,Y_j}(x)\big) \Big\|_\infty + N_{i,Y}\big(\mathbf{v}_{i,Y_j}(x) - \mathbf{v}_{i,Y}(y)\big) \\
&\quad \le \sup_{v\in\overline{B}(0,r_i;\|\cdot\|_2)} \Big\| \big(J_{N_{i,Y_j}} - J_{N_{i,Y}}\big)(v) \Big\|_\infty + N_{i,Y}\big(\mathbf{v}_{i,Y_j}(x) - \mathbf{v}_{i,Y}(y)\big).
\end{aligned} \tag{11.25}$$

(11.25)の最初の不等式は，三角不等式と(11.2)から従う．第 2 の不等式は，(11.24)から従う．(11.21)と(11.6)により，次を得る．

$$\sup_{v\in\overline{B}(0,r_i;\|\cdot\|_2)} \Big\| \big(J_{N_{i,Y_j}} - J_{N_{i,Y}}\big)(v) \Big\|_\infty \longrightarrow 0. \tag{11.26}$$

固定されたノルム $N_{i,Y}$ はコンパクトな単位球面上で連続なので，定数

$$L_i = \max_{u\in\mathbb{S}^{n_i-1}} N_{i,Y}(u)$$

は有限である．任意の $v \in \mathbb{R}^{n_i}$ に対し，斉次性から次が従う．

$$N_{i,Y}(v) \le L_i \|v\|_2.$$

したがって，(11.22)から次が従う．

$$\begin{aligned}
&\sup_{(x,y)\in R_j} N_{i,Y}\big(\mathbf{v}_{i,Y_j}(x) - \mathbf{v}_{i,Y}(y)\big) \\
&\quad \le L_i \sup_{(x,y)\in R_j} \|\mathbf{v}_{i,Y_j}(x) - \mathbf{v}_{i,Y}(y)\|_2 \longrightarrow 0.
\end{aligned} \tag{11.27}$$

(11.25)，(11.26)，(11.27)により，任意の $i \in I_+$ に対し，埋め込まれた座標写像は一様に有界であり，R_j に沿って一様収束する．重み λ_i の連続性と，段階 3 におけるブロック B_{i,Y_j} および $B_{i,Y}$ の定義により，次を得る．

$$\sup_{(x,y)\in R_j} \|B_{i,Y_j}(x) - B_{i,Y}(y)\|_\infty \longrightarrow 0. \tag{11.28}$$

段階 4(c)．重みが零に収束するブロック． $i \in I_-$ を固定する．λ_i の連続性により，$\lambda_i(Y_j, e_j) \to \lambda_i(Y, e) = 0$ が成り立つ．段階 3 の定義から $B_{i,Y} = 0$ が従う．(Y_j, e_j) での重みが零ならば，対応するブロックは，段階 3 の定義により零である．重みが正ならば，局所モデルが定義され，定理 8.11 の (A3) と(11.2)を適用できる．どちらの場合にも，次が成り立つ．

$$\sup_{x\in Y_j} \|B_{i,Y_j}(x)\|_\infty \le 2\lambda_i(Y_j, e_j)\operatorname{diam}(Y_j, e_j) \to 0. \tag{11.29}$$

実際，収束列に沿って直径は有界である．したがって，これらのブロックは，座標の組をどのように選んでも，一様に 0 に収束する．

段階 4(d)．大域写像とその誤差の連続性． I_+ 上では段階 4(b) で選んだ座標の組を用い，I_- 内の重みが正のブロックには任意の座標の組を用いる．次のようにおく．

$$b_j = \sup_{(x,y)\in R_j} \|F_{Y_j}(x) - F_Y(y)\|_E,$$

これにより，b_j は，R_j に沿った F_{Y_j} と F_Y の変位を測る．十分大きい j に対し，I_0 の外のブロックはすべて零となる．E のノルムはブロックのノルムの和であり，I_0 は有限なので，(11.28)と(11.29)から次が従う．

$$b_j \le \sum_{i\in I_0} \sup_{(x,y)\in R_j} \|B_{i,Y_j}(x) - B_{i,Y}(y)\|_\infty \longrightarrow 0. \tag{11.30}$$

R_j の両座標への射影は全射なので，b_j の定義から次が従う．

$$\mathcal{H}[\mathsf{d}](S_{Y_j}, S_Y) \le b_j \longrightarrow 0.$$

ここで，代表 S_{Y_j} と S_Y の構成には，各 $i \in I_+$ について，定理 8.11 の (A4) によって得られる，(11.21)と(11.22)を満たす座標の組を用いる．(11.8)で G の単位元を取れば，次を得る．

$$\mathcal{OD}([S_{Y_j}], [S_Y]) \le \mathcal{H}[\mathsf{d}](S_{Y_j}, S_Y) \longrightarrow 0.$$

これで Φ の連続性が示された．

最後に，$\mathcal{E}\mathrm{rr}$ の連続性を証明する．$(x,y),(z,w) \in R_j$ に対し，E と (Z,h) の三角不等式から

$$|q_{Y_j}(x,z) - q_Y(y,w)| \le 2b_j,$$

および

$$|e_j(x,z) - e(y,w)| \le 2\gamma_j.$$

が従う．(2.4)により，次を得る．

$$|\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y_j, e_j) - \mathcal{E}\mathrm{rr}(Y, e)| \le 2b_j + 2\gamma_j \longrightarrow 0.$$

これで，(11.19)の $\mathcal{E}\mathrm{rr}$ の連続性が示された．

段階 5．補間するホモトピー． 元の距離とモデルの擬距離を補間し，(11.9)と(11.10)の端点の等式，および(11.11)の評価を満たす連続写像 $Q\colon \mathcal{M}\times[0,1]\to\mathcal{M}$ を構成する．

段階 5(a)．定義とコンパクト性． $(Y,e)\in\mathcal{M}$ と $t\in[0,1]$ に対し，

$$q_{Y,t} = (1-t)e + tq_Y, \tag{11.31}$$

および

$$Q((Y,e),t) = [Y, q_{Y,t}]. \tag{11.32}$$

とおく．e と q_Y はいずれも，コンパクト空間 Y 上の連続擬距離である．定義により，$t<1$ のとき，$q_{Y,t}$ は Y 上で同じ位相を生成する距離である．

(11.18)と(8.62)による不変性により，q_Y は，局所モデルで選んだ座標の組によらない．さらに，(8.65)と(8.66)により，任意の等長写像 $u\colon (Y,e)\to (Y_0,e_0)$ は次を満たす．

$$q_{Y_0}(u(y),u(z))=q_Y(y,z)\qquad (y,z\in Y).$$

したがって，Q は $\mathcal{M}\times[0,1]$ 上で矛盾なく定まる．

段階 5(b). 二つの端点. 次に，(11.9)と(11.10)を証明する．(11.31)により，$q_{Y,0}=e$ および $q_{Y,1}=q_Y$ を得る．第 2 の端点では，任意の $y,z\in Y$ に対し，(11.17)から，$q_Y(y,z)=0$ と $F_Y(y)=F_Y(z)$ は同値である．$S_Y=F_Y(Y)$ なので，誘導される写像

$$[Y,q_Y]\to (S_Y,\mathsf{d}|_{S_Y\times S_Y}) \tag{11.33}$$

は，次のように定まる．各 $y\in Y$ に対し，$[y]$ を $F_Y(y)$ に写す．これは全単射である．任意の $y,z\in Y$ に対し，等式

$$q_Y(y,z)=\|F_Y(y)-F_Y(z)\|_E$$

は，この写像が等長写像であることを示す．(11.32)，等長写像(11.33)，および Φ と Ψ の定義により，$\mathcal{M}$ 内で次の等式を得る．

$$Q((Y,e),0)=(Y,e),$$

および

$$Q((Y,e),1)=[Y,q_Y]=(S_Y,\mathsf{d}|_{S_Y\times S_Y})=\Psi\Phi(Y,e).$$

段階 5(c). 時間パラメータの変化. (Y,e) を固定する．(11.11)を証明するため，$s,t\in[0,1]$ とする．(11.19)により，

$$q_{Y,s}-q_{Y,t}=(s-t)(q_Y-e),$$

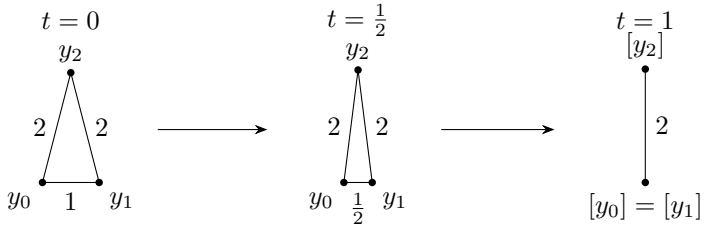
および

$$\|q_{Y,s}-q_{Y,t}\|_\infty=|s-t|\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e).$$

が成り立つ．共通の台集合 Y 上で(2.6)を適用すると，次を得る．

$$\begin{aligned}&\mathcal{GH}\big(Q((Y,e),s),Q((Y,e),t)\big)\\&\quad\le\tfrac12\|q_{Y,s}-q_{Y,t}\|_\infty=\tfrac12|s-t|\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e).\end{aligned}$$

これは(11.11)である．図 9 に，この補間と端点における距離商を示す．



$$q_{Y,t} = (1-t)e + tq_Y$$
$$\mathcal{GH}\big(Q((Y,e),s), Q((Y,e),t)\big) \leq \tfrac{1}{2}|s-t|\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e)$$

図 9. 三点の台集合上での補間．辺のラベルは $q_{Y,t}$ に関する距離を表す．y_0 と y_1 の間の距離は 1 から 0 へ減少し，y_2 までの距離は 2 のままである．端点では，相異なる点が同一視されることがある．一般の軌跡の評価(11.11)は，この端点でも成り立つ．

段階 5(d)．空間と時間の双方が変化するときの連続性．

$$(Y_j, e_j) \longrightarrow (Y, e) \quad \text{空間：} \mathcal{M},$$

および

$$t_j \longrightarrow t \quad \text{空間：} [0,1].$$

とする．次を証明する．

$$\mathcal{GH}\big(Q((Y_j,e_j),t_j), Q((Y,e),t)\big) \longrightarrow 0.$$

段階 4 の対応 R_j と数 $\gamma_j, b_j \to 0$ を用いる．まず，$t_j = t$ の場合を考える．$(x,y),(z,w) \in R_j$ に対し，段階 4 の評価から次が従う．

$$\begin{aligned}
&\big|q_{Y_j,t}(x,z) - q_{Y,t}(y,w)\big| \\
&\quad \leq (1-t)|e_j(x,z) - e(y,w)| + t|q_{Y_j}(x,z) - q_Y(y,w)| \\
&\quad \leq 2(1-t)\gamma_j + 2tb_j.
\end{aligned}$$

$t=1$ では，誘導される擬距離が相異なる点を同一視することがあるので，その距離商を用いる．したがって，命題 2.10 はこの端点でも適用でき，次を得る．

$$\mathcal{GH}\big(Q((Y_j,e_j),t), Q((Y,e),t)\big) \leq (1-t)\gamma_j + tb_j \longrightarrow 0. \tag{11.34}$$

時間を固定した収束と軌跡の評価を合わせ，t_j と t での値を比較する．段階 4 で示した $\mathcal{E}\mathrm{rr}$ の連続性から次が従う．

$$\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y_j,e_j) \longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e).$$

三角不等式と(11.11)により，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\mathcal{GH}\big(Q((Y_j,e_j),t_j),Q((Y,e),t)\big)\\&\qquad\le \mathcal{GH}\big(Q((Y_j,e_j),t_j),Q((Y_j,e_j),t)\big)+\mathcal{GH}\big(Q((Y_j,e_j),t),Q((Y,e),t)\big)\\&\qquad\le \tfrac{1}{2}|t_j-t|\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y_j,e_j)+(1-t)\gamma_j+tb_j\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

$\mathcal{M}\times[0,1]$ は距離化可能なので，これで $Q\colon \mathcal{M}\times[0,1]\to\mathcal{M}$ の連続性が示される． □

11.4. **絶対レトラクト．**ここで，第 10.2 小節の支配定理と拡張定理を適用する．

定理 11.8. 空間 $\mathcal{M}$ は，すべての距離化可能空間に対する ANR である．特に，空間 $\mathcal{M}$ は，すべての距離化可能空間に対する AR でもある．

証明. 各 $\varepsilon>0$ に対し，$\rho\equiv\varepsilon$ として定理 11.7 を適用する．連続写像 $\Phi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ と $\Psi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{M}$，および $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ から $\Psi\circ\Phi$ へのホモトピー Q を得る．(11.11)により，任意の $(Y,e)\in\mathcal{M}$ について次が成り立つ．

$$\mathrm{diam}_{\mathcal{GH}}\{Q((Y,e),t)\mid t\in[0,1]\}\le\tfrac{1}{2}\mathcal{E}\mathrm{rr}(Y,e)<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

定理 10.3 により，$\mathcal{M}$ は，すべての可分距離化可能空間に対する ANR である．

定理 10.4 により，空間 $\mathcal{M}$ は，すべての距離化可能空間に対する ANR である．したがって，定理 2.26 から，$\mathcal{M}$ は，すべての距離化可能空間に対する ANE であることが従う．

命題 2.24 は，すべての距離を 0 へ比例縮小することにより，$\mathcal{M}$ が可縮であることを示す．したがって，定理 10.5 により，可縮な ANE $\mathcal{M}$ は，すべての距離化可能空間に対する AE である．最後に，定理 2.26 を用いると，$\mathcal{M}$ は，すべての距離化可能空間に対する AR であることが分かる． □

定理 *9.1* の証明. これは定理 11.8 の直接の帰結である． □

第 IV 部 Gromov–Hausdorff 空間の位相 IV　Gromov–Hausdorff 空間は ℓ^2 と同相である

概要. 離散近似定理，第 III 部の絶対レトラクト性，完備性，可分性，および Toruńczyk の特徴付けを組み合わせ，Gromov–Hausdorff 空間が可分無限次元 Hilbert 空間と同相であることを証明する.

キーワード. Gromov–Hausdorff 空間，Hilbert 空間，離散近似性，距離積.

2020 年数学主題分類. 主分類 57N20；副分類 54E35，54F45.

12. 第 IV 部の序論

第 III 部では，Gromov–Hausdorff 空間が絶対レトラクトであることを証明した．ここでは，この空間が Hilbert 空間と同相であることを示すために必要な離散近似性を証明する．通常の，基点を指定しない Gromov–Hausdorff 距離 $\mathcal{GH}$ を備えた，空でないコンパクト距離空間の等長類の空間を $\mathcal{M}$ で表す．Antonyan は，$\mathcal{M}$ が可分無限次元 Hilbert 空間と同相であるかを問うている [5, p. 2]．各正整数 n に対し，Antonyan は，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合で表される部分空間が，Hilbert 立方体から一点を除いた空間と同相であることを示している [6, Corollary 5.3].

先行研究では，明示的な族や埋め込みを通じて $\mathcal{M}$ の位相が調べられてきた．著者は，Hilbert 立方体によって連続にパラメータ付けされた，分岐する Gromov–Hausdorff 測地線の族を構成した [26, Theorem 1.3]．また，任意のコンパクト距離化可能空間から，連続体からなる $\mathcal{M}$ の部分集合 [27, Theorem 1.1]，指定された次元を持つ空間からなる部分集合 [28, Theorem 1.3], およびコンパクト距離木からなる部分集合 [29, Theorem 1.1] への位相的埋め込みも構成した．いずれの構成でも，埋め込みの相異なる有限個の値を指定できる．Byakuno [15, arXiv v1, Corollary 1.4] は，長さが正で総和可能な閉区間の可算積に上限距離を入れたものが，$\mathcal{M}$ への等長埋め込みを持つことを証明している.

有限距離空間の部分空間の次元についても振り返る．Nakajima，Yamauchi，Zava [46, arXiv v1, Theorem A] は，高々 n 点の空間からなる部分空間の位相次元が $n(n-1)/2$ であることを証明している．Nakajima と Shioya [45, arXiv v1, Main Theorem 1.2] は，$\mathcal{M}$ の稠密な位相的コピーを含むコンパクト距離化可能空間を構成している.

関連する Hilbert 空間による分類に，Urysohn 普遍距離空間についてのものがある．Uspenskij [55, arXiv v1, Theorem 2.1] は，この空間が ℓ^2 と同相であることを証明している.

本部の近似定理は，コンパクト距離化可能な定義域からの，指定された写像の可算族に関するものである．これらの写像をすべて近似し，$\mathcal{M}$ の各点が，それらの像の高々一つと交わる近傍を持つようにする．この構成では，有限等距離空間との積を用い，第 I–III 部には依存しない．この離散近似と絶対レトラクト性を組み合わせ，次の定理を証明する.

定理 12.1. 空間 $\mathcal{M}$ は，実 *Hilbert* 空間 ℓ^2 と同相である.

この分類は位相だけに関するものであり，Gromov–Hausdorff 距離が担う幾何学的情報を保つものではない．Ivanov と Tuzhilin [34, Main Theorem] は，$\mathcal{M}$ から自身への任意の全射等長写像が恒等写像であることを証明している．Zava [60, arXiv v3, Theorem B] は，有限距離空間の部分空間が，どの Hilbert 空間にも粗埋め込みできないことを証明している．したがって，定理 12.1 の同相写像は双 Lipschitz にはなり得ない．

コンパクト距離化可能な定義域の列 $\{K_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，連続写像 $f_i\colon K_i \to \mathcal{M}$，および $\mathcal{M}$ の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し，連続写像 $g_i\colon K_i \to \mathcal{M}$ を，

$$\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall z \in K_i\ \exists U \in \mathcal{U}, \qquad \{f_i(z), g_i(z)\} \subset U,$$

および

$$\{g_i(K_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \text{は次の空間内で離散：} \mathcal{M}.$$

を満たすように構成する．第 1 の条件は，写像が $\mathcal{U}$-近接であることを意味する．第 2 の条件は，$\mathcal{M}$ の各点が，像の高々一つと交わる近傍を持つことを意味する．これが定理 14.2 である．各 i に対し $K_i = Q = [0,1]^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ とすると，Toruńczyk の特徴付けにおける近似条件を得る．この特徴付けは定理 13.3 に述べたもので，[52, p. 248, assertion (i)] と訂正 [53, Section C] による．この条件を，完備性，可分性，絶対レトラクト性と合わせると，定理 12.1 が示される．

主定理から，各点は，その点への強変形レトラクションを持つ開近傍の基を持つことも従う．これらの近傍を $\mathcal{GH}$ に関する球として選べるかどうかは分からない．

他の部への依存． 定理 14.2 では，共通の準備と，第 13 節で振り返る距離の構成を用いる．第 14.2 小節で Toruńczyk の特徴付けを適用するときに初めて，絶対レトラクト性の結果定理 9.1 を用いる．したがって，分類の証明は，本部の近似と第 I–III 部の結果を組み合わせたものである．

構成． 第 13 節では，離散族を定義し，Hilbert 空間の特徴付けを述べる．第 13.2 小節では，距離積の Gromov–Hausdorff 評価を振り返る．第 14.1 小節では，可算個のコンパクトな定義域からの写像を，像が離散族をなすように近似して，定理 14.2 を証明する．第 14.2 小節では，Toruńczyk の特徴付けを適用して定理 12.1 を証明し，強い局所収縮を得る．節 15 では，関連する空間と Gromov–Hausdorff 球の幾何についての問題を挙げて締めくくる．

規約と記号． すべてのコンパクト距離空間は空でないものとし，Banach 空間と Hilbert 空間は実数体上で考える．コンパクト距離空間を $\mathcal{M}$ 内の等長類と同一視する．等長写像とは，全射な等長埋め込みをいう．距離空間 (X,d) に対し，空でないコンパクト部分集合の集合に Hausdorff 距離 $\mathcal{H}[d]$ を入れたものを $\mathcal{K}(X)$ で表す．コンパクト空間が周囲の距離空間への等長埋め込みを持つとき，この空間をその像と同一視し，周囲空間の制限距離を用いる．指定された定義域上の恒等写像を id で表す．列の添字は $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0,1,2,\dots\}$ で取る．

13. 準備

離散族と開被覆に関する近似を定める．距離積を述べ，Hilbert 空間に関する Toruńczyk の特徴づけを述べる．

13.1. **離散族と近接する写像.** 定理 13.3 の近似条件を述べるために，部分集合の族の離散性と，開被覆に関する写像の近接性を振り返る．

定義 13.1. 空間 T の部分集合の族 $\{A_i\}_{i\in I}$ がT 内で離散であるとは，T の各点が，族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の高々一つの元と交わる近傍を持つことをいう．族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が局所有限であるとは，T の各点が，有限個の元としか交わらない近傍を持つことをいう．これらの条件は，和集合の外の点にも適用される．T の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し，二つの写像 $f, g\colon D \to T$ が$\mathcal{U}$-近接であるとは，各 $z \in D$ に対して $U \in \mathcal{U}$ が存在し，次が成り立つことをいう．

$$\{f(z), g(z)\} \subset U.$$

13.2. **距離積.** 近似の構成で用いる，距離積の Gromov–Hausdorff 評価を振り返る．コンパクト距離空間 (A, d_0) と (B, d_1) に対し，$A \times B$ 上の最大距離を $d_0 \vee d_1$ で表す．任意の $a, u \in A$ と $b, v \in B$ に対し，次のようにおく．

$$(d_0 \vee d_1)((a, b), (u, v)) = \max\{d_0(a, u), d_1(b, v)\}.$$

補題 13.2. (A, d_0)，(B, d_1)，(C, e_0)，(D, e_1) を空でないコンパクト距離空間とする．このとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\mathcal{GH}((A \times B, d_0 \vee d_1), (C \times D, e_0 \vee e_1))\\ &\quad\le \max\{\mathcal{GH}((A, d_0), (C, e_0)), \mathcal{GH}((B, d_1), (D, e_1))\}.\end{aligned} \tag{13.1}$$

証明. $R_A \subset A \times C$ と $R_B \subset B \times D$ を対応とする．座標の順序を変えることにより，その積 $R_\times = R_A \times R_B$ を，$A \times B$ と $C \times D$ の間の対応とみなす．実数 a, b, c, d に対し，次が成り立つ．

$$|\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| \le \max\{|a - c|, |b - d|\}.$$

したがって，$\operatorname{dis} R_\times \le \max\{\operatorname{dis} R_A, \operatorname{dis} R_B\}$ である．二つの因子の対応全体にわたって下限を取ると，(2.1)により(13.1)が示される． □

13.3. **Hilbert 空間の特徴付け.** 以下の Hilbert 空間の特徴付けを用いる．これは，Toruńczyk の定理 [52, p. 248, condition (i)] と，その訂正 [53, Section C] による．

定理 13.3 (Toruńczyk，[52, p. 248, condition (i)]，[53, Section C])．(T, r) を，空でない完備可分距離 AR とし，$Q = [0, 1]^{\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ を *Hilbert* 立方体とする．$\mathbb{Z}_{\ge 0}$ には離散位相を入れる．このとき，T が実 *Hilbert* 空間 ℓ^2 と同相であるための必要十分条件は，任意の連続写像 $f\colon \mathbb{Z}_{\ge 0} \times Q \to T$ と T の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し，f と $\mathcal{U}$-近接で，像の族 $\{g(\{i\} \times Q)\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ が T 内で離散であるような連続写像 $g\colon \mathbb{Z}_{\ge 0} \times Q \to T$ が存在することである．

14. 離散近似と Hilbert 空間の位相

Hilbert 空間に関する Toruńczyk の特徴づけを適用するため，可算個の Hilbert 立方体からの写像について離散近似性を示す．

14.1. **コンパクトな定義域に対する離散近似.** ここで，近似写像を構成し，周囲の Gromov–Hausdorff 空間の各点における離散性を証明する.

まず，開被覆に適合する正の Lipschitz 尺度を選ぶ.

補題 14.1. $\mathcal{U}$ を $\mathcal{M}$ の開被覆とする．このとき，次の性質を持つ 1/16-*Lipschitz* 関数 $L\colon \mathcal{M} \to (0, 1/16]$ が存在する．任意の $(X,d),(Y,e) \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)) < L(X,d),$$

ならば，$U \in \mathcal{U}$ が存在して次が成り立つ.

$$\{(X,d),(Y,e)\} \subset U.$$

証明. 空集合までの距離を ∞ とする規約を用いる．任意の $(X,d) \in \mathcal{M}$ に対し，次のようにおく.

$$L(X,d) = \frac{1}{16} \sup_{O \in \mathcal{U}} \min\left\{1, \mathrm{dist}_{\mathcal{GH}}\big((X,d), \mathcal{M} \setminus O\big)\right\}. \tag{14.1}$$

各切り詰めた距離関数は 1-Lipschitz であり，$\mathcal{U}$ は開被覆なので，その上限は正である．したがって，任意の $(X,d),(Y,e) \in \mathcal{M}$ に対し，

$$0 < L(X,d) \le \frac{1}{16}, \tag{14.2}$$

および

$$|L(X,d) - L(Y,e)| \le \frac{1}{16}\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)). \tag{14.3}$$

が成り立つ．ここで，$(X,d),(Y,e) \in \mathcal{M}$ が $\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)) < L(X,d)$ を満たすとする．(14.1)により，$\mathcal{O} \in \mathcal{U}$ が存在し，次が成り立つ.

$$\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)) < L(X,d) < \mathrm{dist}_{\mathcal{GH}}\big((X,d), \mathcal{M} \setminus \mathcal{O}\big).$$

したがって，両空間は $\mathcal{O}$ に属する. □

定理 14.2. $\{K_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ をコンパクト距離化可能空間の列とする.各 $i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し,$f_i\colon K_i \to \mathcal{M}$ を連続とする.$\mathcal{U}$ を $\mathcal{M}$ の開被覆とする.このとき,連続写像 $g_i\colon K_i \to \mathcal{M}$ が存在し，各 g_i は f_i と $\mathcal{U}$-近接であり，族 $\{g_i(K_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ は $\mathcal{M}$ 内で離散である.

証明. まず，空の定義域を処理する．空の各定義域 K_i に対し，g_i を一意な空写像とする．空の像は近接性にも離散性にも影響しないので，すべての定義域 K_i が空ならば主張は成り立つ．以下では，空でない定義域だけを考え，$I = \{i \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid K_i \neq \emptyset\}$ とおく．各 $i \in I$ に対し，正整数 m_i を再帰的に定め，$z \in K_i$ に対して，各値 $f_i(z)$ と，濃度が m_i の有限等距離空間との積を取ることにより，近似写像 $g_i(z)$ を構成する．その後，得られる像の族が局所有限かつ離散であることを証明する.

段階 1．積による近似. 補題 14.1 により，(14.3)とその補題の被覆についての条件を満たす $L\colon \mathcal{M} \to (0, 1/16]$ を選ぶ.

整数 $m \geq 2$ に対し，$E_m = \{0, \dots, m-1\}$ とする．$r > 0$ に対し，$\Upsilon_{m,r}$ を，対角線外の距離が r である E_m 上の等距離空間の距離とする．各整数 $m \geq 2$ に対し，$P_m \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を次のように定める．$(X,d) \in \mathcal{M}$ に対し，

$$r = L(X,d) \tag{14.4}$$

および

$$P_m(X,d) = (X \times E_m, d \vee \Upsilon_{m,r}). \tag{14.5}$$

とおく．X への射影のグラフは，歪みが高々 r の対応である．したがって，次が成り立つ．

$$\mathcal{GH}(P_m(X,d),(X,d)) \leq \frac{1}{2} L(X,d). \tag{14.6}$$

整数 $m \geq 2$ と空間 $(X,d),(Y,e) \in \mathcal{M}$ に対し，二つの等距離因子で同じラベルを対にする．[26, Proposition 5.3] の証明と同様に，積の対応と(14.3)から次が従う．

$$\begin{aligned} &\mathcal{GH}(P_m(X,d),P_m(Y,e)) \\ &\quad \leq \max\left\{\mathcal{GH}((X,d),(Y,e)), \frac{1}{2}\left|L(X,d) - L(Y,e)\right|\right\} \\ &\quad \leq \mathcal{GH}((X,d),(Y,e)). \end{aligned} \tag{14.7}$$

したがって，各写像 P_m は 1-Lipschitz である．

段階 2．濃度の選択と像の分離． $i \in I$ に関して再帰的に，正整数 m_i と写像 g_i を選ぶ．$i \in I$ を固定し，それより小さい添字の写像はすでに構成され，コンパクトな像を持つと仮定する．次のようにおく．

$$\mathcal{C}_i = \bigcup_{\substack{k \in I \\ k < i}} g_k(K_k). \tag{14.8}$$

この集合はコンパクトであり，I の最小の添字に対しては空集合である．K_i は空でないコンパクト集合なので，数

$$r_i = \min_{z \in K_i} L(f_i(z)) \tag{14.9}$$

は正である．

$\mathcal{C}_i$ のコンパクト性と系 2.6 により，整数 $b_i \geq 0$ が存在し，$\mathcal{C}_i$ 内の各空間の任意の $r_i/2$-分離部分集合の濃度は，高々 b_i である．$\mathcal{C}_i = \emptyset$ ならば，$b_i = 0$ とする．

整数 m_i を，すでに選んだすべての濃度より大きく，かつ，

$$m_i > \max\{i+1, b_i\}. \tag{14.10}$$

を満たすように選ぶ．$g_i \colon K_i \to \mathcal{M}$ を次で定める．

$$g_i = P_{m_i} \circ f_i. \tag{14.11}$$

写像 g_i は(14.7)により連続であり，その像はコンパクトである．任意の $z \in K_i$ に対し，式(14.6)から次が従う．

$$\mathcal{GH}(g_i(z), f_i(z)) \leq \frac{1}{2} L(f_i(z)) < L(f_i(z)). \tag{14.12}$$

したがって，g_i と f_i は $\mathcal{U}$-近接である．

$g_i(K_i)$ 内の各積は，第 1 因子の一点を固定することで得られる，等距離因子のコピーを含む．(14.9)により，このコピーは，互いに少なくとも r_i 離れた m_i 個の点を持つ．背理法で示す．このような積と $\mathcal{C}_i$ 内の空間との GH 距離が $r_i/4$ より小さいと仮定する．すると，歪みが $r_i/2$ より小さい対応によって，これらの点に対応する点をその空間から選ぶと，それらは相異なり，互いに $r_i/2$ より大きく離れる．このことから $m_i \le b_i$ が従い，(14.10)に反する．したがって，任意の $z \in K_i$ と任意の $(Y,e) \in \mathcal{C}_i$ に対し，次が成り立つ．

$$\mathcal{GH}(g_i(z),(Y,e)) \ge \frac{r_i}{4}. \tag{14.13}$$

これで再帰的構成が完了し，像が互いに素であることが示された．

図 10 に，尺度と濃度によって近似と像の分離を制御する方法を示す．

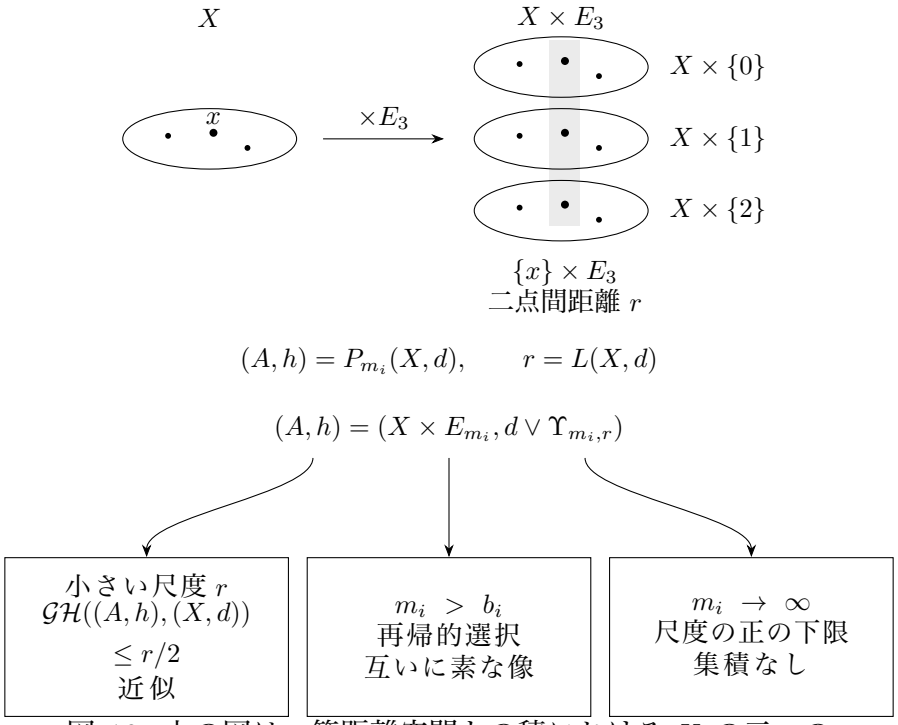


図 10. 上の図は，等距離空間との積における X の三つのコピーを示す．一般の因子 E_m に対し，示したファイバーは，二点間距離が r である m 個の点を持つ．等距離因子の尺度と濃度によって，離散近似を制御する．評価 b_i は，すでに構成した像の中の $r_i/2$-分離部分集合に適用される．ここで，r_i は(14.9)の入力尺度の最小値である．再帰的な選択(14.10)により像が分離される．近似空間の収束列に沿って，尺度は正の下限を持つので，濃度の発散は系 2.6 に矛盾する．

段階 3. 局所有限性. 背理法で示す．族 $\{g_i(K_i)\}_{i\in I}$ がある $(Z,h_\infty)\in\mathcal{M}$ において局所有限でないと仮定する．すると，この点のどの近傍も無限個の像と交わる．各 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，それまでに選んだ添字よりも大きい添字 i_j と，その像が (Z,h_∞) を中心とする半径 2^{-j} の GH 球に入る点 $z_j\in K_{i_j}$ を選ぶ．各 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，(14.5)と(14.11)で与えられる値を $f_{i_j}(z_j)=(X_j,d_j)$ および $g_{i_j}(z_j)=(Y_j,e_j)$ とおく．すると，次が成り立つ．

$$(Y_j,e_j)\to(Z,h_\infty). \tag{14.14}$$

各 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$n_j:=m_{i_j}$ および $L_j=L(X_j,d_j)$ とおく．任意の $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，(14.3)と(14.12)から次が従う．

$$\begin{aligned}
L(Z,h_\infty)&\leq L_j+\frac{1}{16}\mathcal{GH}((X_j,d_j),(Z,h_\infty))\\
&\leq L_j+\frac{1}{16}\Big(\mathcal{GH}((X_j,d_j),(Y_j,e_j))+\mathcal{GH}((Y_j,e_j),(Z,h_\infty))\Big)\\
&\leq L_j+\frac{1}{16}\Big(\frac{1}{2}L_j+\mathcal{GH}((Y_j,e_j),(Z,h_\infty))\Big)\\
&\leq \frac{33}{32}L_j+\frac{1}{16}\mathcal{GH}((Y_j,e_j),(Z,h_\infty)).
\end{aligned} \tag{14.15}$$

$c=\frac{1}{2}L(Z,h_\infty)>0$ とおく．(14.14)と(14.15)より，十分大きいすべての j に対し，次が成り立つ．

$$L_j\geq c. \tag{14.16}$$

各 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$x_j\in X_j$ を選び，次のように定める．

$$S_j=\{(x_j,\zeta)\mid\zeta\in E_{n_j}\}\subset Y_j.$$

十分大きいすべての j と，相異なるすべての $\zeta_0,\zeta_1\in E_{n_j}$ に対し，式(14.16)から次が従う．

$$e_j((x_j,\zeta_0),(x_j,\zeta_1))=\max\{0,L_j\}=L_j\geq c.$$

よって，十分大きいすべての j について，S_j は c-分離集合である．(14.14)と系 2.6 により，濃度 $\mathrm{Card}(S_j)$ は一様に有界である．しかし，

$$\mathrm{Card}(S_j)=n_j>i_j+1\longrightarrow\infty.$$

なので，これは(14.10)に矛盾する．

したがって，族 $\{g_i(K_i)\}_{i\in I}$ は局所有限である．

段階 4. 離散性. 互いに素な閉集合の局所有限族は離散である．段階 2 と 3 により，この事実を，構成したコンパクトな像に適用できる．I が有限ならば，局所有限性は自動的に成り立つ． □

14.2. **主定理の証明.** 第 III 部の AR 性と，定理 14.2 の離散近似を用い，$\mathcal{M}$ に定理 13.3 を適用する．

定理 *12.1* の証明. 定理 2.7 により，$\mathcal{M}$ は完備かつ可分であり，定理 9.1 により，空でない AR である．各 $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $K_i=Q$ として定理 14.2 を適用すると，定理 13.3 の近似条件が成り立つ．したがって，定理 13.3 により，$\mathcal{M}$ は ℓ^2 と同相である． □

定理 12.1 の証明は，直径が 1 の空間からなる部分空間にも適用できる．

系 14.3. $\mathcal{M}$ の部分空間

$$\mathcal{M}_1 = \{(X,d) \in \mathcal{M} \mid \operatorname{diam}(X,d) = 1\}$$

は，実 *Hilbert* 空間 ℓ^2 と同相である．

証明．$\mathcal{M}_1$ は $\mathcal{M}$ の空でない閉部分空間なので，空間 $\mathcal{M}_1$ も完備かつ可分である．$R\colon \mathcal{M} \setminus \{*\} \to \mathcal{M}_1$ を次のように定める．任意の $(X,d) \in \mathcal{M} \setminus \{*\}$ に対し，次のようにおく．

$$R(X,d) = (X, d/\operatorname{diam}(X,d)).$$

命題 2.24 により，これは連続なレトラクションである．すなわち，$\mathcal{M}_1$ は，定理 11.8 の AR $\mathcal{M}$ の開部分集合のレトラクトである．これは，$\mathcal{M}_1$ も ANR であることを意味する．

直径が 1 の二点距離空間 (D,δ) を固定する．$H\colon \mathcal{M}_1 \times [0,1] \to \mathcal{M}_1$ を次のように定める．任意の $(X,d) \in \mathcal{M}_1$ と任意の $t \in [0,1]$ に対し，

$$H((X,d),t) = R\big([X,(1-t)d] \times [D,t\delta]\big),$$

とおく．ここでは積に最大距離を用い，その直径は $\max\{1-t,t\} > 0$ である．命題 2.24 and 補題 13.2 は，H が連続であり，$\mathcal{M}_1$ を (D,δ) に収縮させることを示す．よって，定理 2.26 と 10.5 により，$\mathcal{M}_1$ は AR である．

$\mathcal{U}_0$ を，$\mathcal{M}_1$ を覆う $\mathcal{M}$ の開集合の族とし，$\mathcal{M}$ の開被覆 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \{\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1\}$ を考える．定理 14.2 の証明で用いた構成を，$\mathcal{M}_1$ への写像と被覆 $\mathcal{U}$ に適用する．任意の $(X,d) \in \mathcal{M}_1$ と任意の整数 $m \geq 2$ に対し，$L \leq 1/16$ なので，段階 1 の写像は次を満たす．$\operatorname{diam}\big(P_m(X,d)\big) = \max\{1, L(X,d)\} = 1$ したがって，段階 2–4 の再帰的な選択と離散性の議論は，$\mathcal{M}_1$ においても有効である．元の写像と近似写像はともに $\mathcal{M}_1$ に値を取るので，$\mathcal{U}$ に関する近さから $\mathcal{U}_0$ に関する近さが従う．定理 12.1 の証明と同様に，ここでも定理 13.3 が適用できる． □

注意 14.4. Kadets は，すべての可分無限次元 Banach 空間が同相であることを証明した [35, Theorem]．したがって，定理 12.1 から，$\mathcal{M}$ は，任意の実可分無限次元 Banach 空間と同相であることが従う．これには，一様ノルムを備えた $C([0,1],\mathbb{R})$ と，任意の $1 \leq p < \infty$ に対する ℓ^p が含まれる．

主定理から，強い局所収縮も従う．

系 14.5. 任意の点 $(X,d) \in \mathcal{M}$ は，$\{(X,d)\}$ への強変形レトラクションを持つ開近傍の基を持つ．

注意 14.6. 著者は，非 Archimedes Gromov–Hausdorff 空間を関数空間と等長に同一視することにより，その位相を決定した [30, Theorems 1.1 and 1.3(3)–(4)]．$\mathcal{U}$ を，空でないコンパクト超距離空間の等長類全体とする．その非 Archimedes Gromov–Hausdorff 距離 $\mathcal{GH}_{\mathrm{NA}}$ は，共通の超距離空間への等長像の間の Hausdorff 距離の下限である．$\mathbf{G}$ を，

$$f(0) = 0,$$

を満たし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathrm{Card}\big(\{r \geq \varepsilon \mid f(r) \neq 0\}\big) < \infty.$$

を満たす関数 $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 全体とする．$\mathbf{G}$ に次の超距離を入れる．

$$\Delta_{\mathrm{U}}(f,g) = \begin{cases} \max\{r \in [0,\infty) \mid f(r) \neq g(r)\}, & f \neq g, \\ 0, & f = g. \end{cases}$$

このとき，引用した定理から次が従う．

$$(\mathcal{U}, \mathcal{GH}_{\mathrm{NA}})\text{は次と等長：}(\mathbf{G}, \Delta_{\mathrm{U}}).$$

15. 問題

関連する空間と GH 球の幾何についての問題を挙げて締めくくる．定義 2.21 の mm 同型類とボックス位相を用いる．

問題 15.1. ボックス位相を備えた距離測度空間の mm 同型類の空間は，実 Hilbert 空間 ℓ^2 と同相か．

ボックス位相と区別するために，集中位相を振り返る．I 上の可測実数値関数 f, g を，ほとんど至る所の一致を除いて考え，*Ky Fan* 距離を次で定める．

$$d_{\mathrm{KF}}(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mathcal{L}^1(\{s \in I \mid |f(s) - g(s)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\}.$$

X 上の実数値 1-Lipschitz 関数全体を $\mathrm{Lip}_1(X)$ とする．X のパラメータ φ に対し，$\varphi^* \mathrm{Lip}_1(X) = \{f \circ \varphi \mid f \in \mathrm{Lip}_1(X)\}$ とおく．φ と ψ は，それぞれ X と Y のパラメータ全体を動くものとする．観測距離は次で与えられる．

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) = \inf_{\substack{\varphi\text{は次の空間のパラメータ：}X \\ \psi\text{は次の空間のパラメータ：}Y}} \mathcal{H}[d_{\mathrm{KF}}]\big(\varphi^* \mathrm{Lip}_1(X), \psi^* \mathrm{Lip}_1(Y)\big).$$

I 上の可測実数値関数からなる空でない集合 A, B に対し，次を用いる．

$$\mathcal{H}[d_{\mathrm{KF}}](A,B) = \max\left\{ \sup_{f \in A} \inf_{g \in B} d_{\mathrm{KF}}(f,g), \sup_{g \in B} \inf_{f \in A} d_{\mathrm{KF}}(f,g) \right\}.$$

この定義に A や B のコンパクト性は不要である．$d_{\mathrm{KF}} \leq 1$ なので，これは有限である．$\mathcal{X}$ 上の距離 d_{conc} は，集中位相を誘導する [36, arXiv v1, Definitions 2.4, 2.13 and Theorem 2.14].

集中位相については,類似の問題の答えは否定的である.実際,Kazukawa, Nakajima，Shioya は，$(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ が Baire 空間でないことを証明している [36, arXiv v1, Theorem 1.3]．一方，ℓ^2 は Baire 空間である．

Nakajima と Shioya は，$\mathcal{M}$ の稠密な位相的コピーを含むコンパクト距離化可能空間を構成している [45, arXiv v1, Main Theorem 1.2]．これにより，次の問題を得る．

問題 15.2. Nakajima と Shioya が構成した $\mathcal{M}$ のコンパクト化は，Hilbert 立方体 Q と同相か．

系 14.5 の近傍基は，GH 球からなるとは限らない．節 2 で導入した，開 Gromov–Hausdorff 球を表す記号 $\mathcal{B}((X,d),r)$ を用いる．

問題 15.3. 任意の $(X,d) \in \mathcal{M}$ に対し，$r_0 > 0$ が存在して，任意の $0 < r < r_0$ について球 $\mathcal{B}((X,d),r)$ は可縮となるか．さらに強く，このような各球は，$\{(X,d)\}$ への強変形レトラクションを持つか．

半径を制御した，より大きい球に像が入る収縮についても問うことができる．

問題 15.4. 任意の $(X,d) \in \mathcal{M}$ に対し，$C \geq 1$ と $r_0 > 0$ が存在して，任意の $0 < r < r_0$ について連続写像 $H\colon \mathcal{B}((X,d),r) \times [0,1] \to \mathcal{B}((X,d),Cr)$ が存在し，任意の $(Y,e) \in \mathcal{B}((X,d),r)$ に対して $H((Y,e),0) = (Y,e)$ および $H((Y,e),1) = (X,d)$ が成り立ち，任意の $t \in [0,1]$ に対して $H((X,d),t) = (X,d)$ が成り立つか．r_0 は (X,d) に依存してよいものとして，C を (X,d) によらずに選べるか．

最後のコンパクト化を定めるため,定義 2.21 の $\mathcal{X}$ と $\square$ を用いる.$X, Y \in \mathcal{X}$ に対し,それぞれ代表 (A, d_A, μ_A) と (B, d_B, μ_B) を選ぶ. $f_*(\mu_A|_{\operatorname{supp}\mu_A}) = \mu_B|_{\operatorname{supp}\mu_B}$ を満たす 1-Lipschitz 写像 $f\colon \operatorname{supp}\mu_A \to \operatorname{supp}\mu_B$ が存在するとき, $Y \prec X$ と書く. この条件は代表によらない. ピラミッドとは, ボックス位相で閉じた空でない部分集合 $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ であって,任意の $X \in \mathcal{P}$ と,$Y \prec X$ を満たす任意の $Y \in \mathcal{X}$ に対し $Y \in \mathcal{P}$ となり，任意の $X, Y \in \mathcal{P}$ に対し，$X \prec Z$ および $Y \prec Z$ を満たす $Z \in \mathcal{P}$ が存在するものをいう [36, arXiv v1, Definitions 2.2 and 2.16]. ピラミッド全体の集合を Π とする. $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を Π 内の列とし, $\mathcal{P} \in \Pi$ とする. $X \in \mathcal{X}$ に対し, $\square(X, \mathcal{P}_n) = \inf_{Y\in\mathcal{P}_n} \square(X, Y)$ とおく.Π 上の弱位相は距離化可能であり, $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}$ が成り立つための必要十分条件が，次の二条件がともに成り立つことであることによって特徴付けられる. 任意の $X \in \mathcal{P}$ に対し $\square(X, \mathcal{P}_n) \longrightarrow 0$ であり, 任意の $X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{P}$ に対し $\liminf_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_n) > 0$ である. 割当て $X \mapsto \{Y \in \mathcal{X} \mid Y \prec X\}$ により，集中位相の空間 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ は，コンパクト空間 Π の稠密部分空間と同一視される [36, arXiv v1, Definition 2.17 and Theorem 2.18]. Kazukawa, Nakajima，Shioya は，Π が可縮かつ局所弧状連結であることを証明している [36, arXiv v1, Theorems 1.4 and 1.6]. これは，問題 15.2 のものとは異なるコンパクト化である．

問題 15.5. 弱位相を備えた Π は，Hilbert 立方体 Q と同相か．

系 5.10 は，Gromov–Hausdorff 空間 $\mathcal{M}$ を，測度付き空間 $\mathcal{E}$ のレトラクトとして埋め込む．$\mathcal{E}$ が $\mathcal{M}$ と同じ同相型を持つかを問う．

$\mathcal{E}$ には，定義 4.2 の Gromov–Hausdorff–Prokhorov 距離 $\mathcal{GHP}$ を入れる．確率測度は全台を持つ必要はない．

問題 15.6. $(\mathcal{E}, \mathcal{GHP})$ は，実 Hilbert 空間 ℓ^2 と同相か．

参考文献

[1] P. M. Anselone and T. W. Palmer. *Spectral analysis of collectively compact, strongly convergent operator sequences*. *Pacific Journal of Mathematics* 25.3 (1968), pp. 423–431. DOI: 10.2140/pjm.1968.25.423.

[2] S. A. Antonyan. *Retraction properties of an orbit space*. *Mathematics of the USSR-Sbornik* 65.2 (1990), pp. 305–321. DOI: 10.1070/SM1990v065n02ABEH001311.

[3] S. Antonyan. *West's problem on equivariant hyperspaces and Banach–Mazur compacta*. *Transactions of the American Mathematical Society* 355.8 (2003), pp. 3379–3404. DOI: 10.1090/S0002-9947-03-03217-3.

[4] S. Antonyan. *Corrigendum to "West's problem on equivariant hyperspaces and Banach–Mazur compacta"*. *Transactions of the American Mathematical Society* 358.12 (2006), pp. 5631–5633. DOI: 10.1090/S0002-9947-06-04200-0.

[5] S. A. Antonyan. *The Gromov–Hausdorff hyperspace of a Euclidean space*. *Advances in Mathematics* 363, 106977 (2020). DOI: 10.1016/j.aim.2020.106977.

[6] S. A. Antonyan. *The Gromov–Hausdorff hyperspace of a Euclidean space, II*. *Advances in Mathematics* 393, 108055 (2021). DOI: 10.1016/j.aim.2021.108055.

[7] S. Axler. *Linear Algebra Done Right*. 4th ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Author's PDF revision dated 16 August 2026. Springer, 2024. DOI: 10.1007/978-3-031-41026-0. URL: https://linear.axler.net/LADR4e.pdf.

[8] T. Banakh and T. Radul. *Geometry of mappings of probability measure spaces*. *Matematychni Studii* 11.1 (1999). In Russian, pp. 17–30. URL: https://matstud.org.ua/texts/1999/11_1/11_1_017-030.pdf.

[9] J. Bates. *The embedding dimension of Laplacian eigenfunction maps*. *Applied and Computational Harmonic Analysis* 37.3 (2014), pp. 516–530. DOI: 10.1016/j.acha.2014.03.002. arXiv: 1605.01643v1 [math.DG].

[10] G. Beer. *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*. Vol. 268. Mathematics and Its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. DOI: 10.1007/978-94-015-8149-3.

[11] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. 2nd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1999. DOI: 10.1002/9780470316962.

[12] V. I. Bogachev. *Measure Theory*. Vol. II. Berlin: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5.

[13] D. Breit and F. Gmeineder. *A Course on Function Spaces I. Continuous and Integrable Functions*. Universitext. Cham: Springer, 2026. DOI: 10.1007/978-3-030-80643-9.

[14] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A Course in Metric Geometry*. Vol. 33. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001. DOI: 10.1090/gsm/033.

[15] T. Byakuno. *A sequence of compact metric spaces and an isometric embedding into the Gromov–Hausdorff space*. *Topology and its Applications* 384, 109790 (2026). DOI: 10.1016/j.topol.2026.109790. arXiv: 2507.07449v1 [math.MG].

[16] Ş. Cobzaş, R. Miculescu, and A. Nicolae. *Lipschitz Functions*. Vol. 2241. Lecture Notes in Mathematics. Cham: Springer, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-16489-8.

[17] D. W. Curtis. *Hyperspaces of noncompact metric spaces*. *Compositio Mathematica* 40.2 (1980), pp. 139–152. URL: https://www.numdam.org/item/CM_1980__40_2_139_0/.

[18] D. W. Curtis and R. M. Schori. *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*. *Fundamenta Mathematicae* 101.1 (1978), pp. 19–38. DOI: 10.4064/fm-101-1-19-38.

[19] J. Diestel and A. Spalsbury. *The Joys of Haar Measure*. Vol. 150. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2014. ISBN: 978-1-4704-0935-7. DOI: 10.1090/gsm/150.

[20] J. Dugundji. *Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces*. *Compositio Mathematica* 13 (1958), pp. 229–246. URL: https://www.numdam.org/item/CM_1956-1958__13__229_0/.

[21] R. Engelking. *General Topology*. 2nd ed. Vol. 6. Sigma Series in Pure Mathematics. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3-88538-006-4.

[22] M. Gromov. *Groups of polynomial growth and expanding maps*. *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 53 (1981), pp. 53–78. DOI: 10.1007/BF02698687. URL: https://www.numdam.org/articles/10.1007/BF02698687/.

[23] O. Hanner. *Some theorems on absolute neighborhood retracts*. *Arkiv för Matematik* 1.5 (1951), pp. 389–408. DOI: 10.1007/BF02591376.

[24] O. Hanner. *Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces*. *Arkiv för Matematik* 2.4 (1952), pp. 315–360. DOI: 10.1007/BF02591501.

[25] S. Iliadis, A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin. *Local structure of Gromov–Hausdorff space, and isometric embeddings of finite metric spaces into this space*. *Topology and its Applications* 221 (2017), pp. 393–398. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.050. arXiv: 1604.07615v1 [math.MG].

[26] Y. Ishiki. *Branching geodesics of the Gromov–Hausdorff distance*. *Analysis and Geometry in Metric Spaces* 10.1 (2022), pp. 109–128. DOI: 10.1515/agms-2022-0136.

[27] Y. Ishiki. *Continua in the Gromov–Hausdorff space*. *Topology and its Applications* 312, 108058 (2022). DOI: 10.1016/j.topol.2022.108058.

[28] Y. Ishiki. *Fractal dimensions in the Gromov–Hausdorff space. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics* 71.2 (2023), pp. 147–168. DOI: 10.4064/ba221212-16-11.

[29] Y. Ishiki. *Metric trees in the Gromov–Hausdorff space. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 64.1 (2023), pp. 73–82. DOI: 10.14712/1213-7243.2023.012.

[30] Y. Ishiki. *Uniqueness and homogeneity of non-separable Urysohn universal ultrametric spaces. Topology and its Applications* 342, 108762 (2024). DOI: 10.1016/j.topol.2023.108762.

[31] Y. Ishiki. *An interpolation of metrics and spaces of metrics. Topology and its Applications* 388, 109856 (2026). DOI: 10.1016/j.topol.2026.109856.

[32] A. O. Ivanov, S. Iliadis, and A. A. Tuzhilin. *Realizations of Gromov–Hausdorff Distance*. Version 1. 2016. DOI: 10.48550/arXiv.1603.08850. arXiv: 1603.08850 [math.MG].

[33] A. O. Ivanov, N. K. Nikolaeva, and A. A. Tuzhilin. *The Gromov–Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic*. Version 1. 2015. DOI: 10.48550/arXiv.1504.03830. arXiv: 1504.03830 [math.MG].

[34] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin. *Isometry group of Gromov–Hausdorff space. Matematički Vesnik* 71.1–2 (2019), pp. 123–154. URL: https://www.vesnik.math.rs/vol/mv191209.pdf.

[35] M. I. Kadets. *Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces. Functional Analysis and Its Applications* 1.1 (1967), pp. 53–62. DOI: 10.1007/BF01075865.

[36] D. Kazukawa, H. Nakajima, and T. Shioya. *Topological aspects of the space of metric measure spaces. Geometriae Dedicata* 218, 68 (2024). DOI: 10.1007/s10711-024-00921-3. arXiv: 2304.06878v1 [math.MG].

[37] A. Khezeli. *A unified framework for generalizing the Gromov–Hausdorff metric. Probability Surveys* 20 (2023), pp. 837–896. DOI: 10.1214/20-PS340. arXiv: 1812.03760v5. URL: https://arxiv.org/abs/1812.03760v5.

[38] A. Kroshnin, E. Stepanov, and D. Trevisan. *Infinite multidimensional scaling for metric measure spaces. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 28, 58 (2022). DOI: 10.1051/cocv/2022053. arXiv: 2201.05885v2 [math.MG].

[39] K. Kuwae and T. Shioya. *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry. Communications in Analysis and Geometry* 11.4 (2003), pp. 599–673. DOI: 10.4310/CAG.2003.v11.n4.a1.

[40] J.-Y. Larrieu. *New existence theorems in measure theory and equivalence results for the existence of invariant probabilities*. Version 4. 2014. DOI: 10.48550/arXiv.1108.2181. arXiv: 1108.2181v4 [math.PR].

[41] T. Leinster and E. Roff. *The maximum entropy of a metric space. The Quarterly Journal of Mathematics* 72.4 (2021), pp. 1271–1309. DOI: 10.1093/qmath/haab003. arXiv: 1908.11184v2 [math.MG].

[42] C. Maria, S. Oudot, and E. Solomon. "Intrinsic topological transforms via the distance kernel embedding". In: *36th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2020)*. Ed. by S. Cabello and D. Z. Chen. Vol. 164. Leibniz International Proceedings in Informatics. Dagstuhl: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020, 56:1–56:15. DOI: 10.4230/LIPIcs.SoCG.2020.56.

[43] F. Mémoli and Z. Wan. *Characterization of Gromov-type geodesics. Differential Geometry and its Applications* 88, 102006 (2023). DOI: 10.1016/j.difgeo.2023.102006. arXiv: 2105.05369v2 [math.MG].

[44] J. Muscat. *Functional Analysis. An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. 2nd ed. Cham: Springer, 2024. DOI: 10.1007/978-3-031-27537-1.

[45] H. Nakajima and T. Shioya. *A natural compactification of the Gromov–Hausdorff space. Geometriae Dedicata* 218, 10 (2024). DOI: 10.1007/s10711-023-00852-5. arXiv: 2109.14853v1 [math.MG].

[46] H. Nakajima, T. Yamauchi, and N. Zava. *Topological dimension of the Gromov–Hausdorff and Gromov–Prokhorov spaces*. To appear in the Journal of the Mathematical Society of Japan. 2025. arXiv: 2502.11615v1 [math.MG].

[47] R. S. Palais. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. Annals of Mathematics* 73.2 (1961), pp. 295–323. DOI: 10.2307/1970335.

[48] K. R. Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces*. Vol. 352. AMS Chelsea Publishing. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005. DOI: 10.1090/chel/352.

[49] J. Rouyer. *Generic properties of compact metric spaces. Topology and its Applications* 158.16 (2011), pp. 2140–2147. DOI: 10.1016/j.topol.2011.07.003. arXiv: 1003.5087v1 [math.MG].

[50] H. Shibahara. *Gromov–Hausdorff distance with boundary and its application to Gromov hyperbolic spaces and uniform spaces*. Version 1. 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2108.03626. arXiv: 2108.03626v1 [math.MG].

[51] T. Shioya. *Metric Measure Geometry. Gromov's Theory of Convergence and Concentration of Metrics and Measures*. Vol. 25. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics. The cited numbering refers to the author's manuscript dated 19 March 2018. European Mathematical Society, 2016. DOI: 10.4171/158. arXiv: 1410.0428v1 [math.MG].

[52] H. Toruńczyk. *Characterizing Hilbert space topology. Fundamenta Mathematicae* 111.3 (1981), pp. 247–262. DOI: 10.4064/fm-111-3-247-262.

[53] H. Toruńczyk. *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*. *Fundamenta Mathematicae* 125.1 (1985), pp. 89–93. DOI: 10.4064/fm-125-1-89-93.

[54] A. A. Tuzhilin. *Lectures on Hausdorff and Gromov–Hausdorff Distance Geometry*. Version 1. 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2012.00756. arXiv: 2012.00756 [math.MG].

[55] V. Uspenskij. *The Urysohn universal metric space is homeomorphic to a Hilbert space*. *Topology and its Applications* 139.1–3 (2004), pp. 145–149. DOI: 10.1016/j.topol.2003.09.008. arXiv: math/0309101v1 [math.GN].

[56] V. Valov. *Probability measures and Milyutin maps between metric spaces*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 350.2 (2009), pp. 723–730. DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.06.003. arXiv: 0801.1721v2 [math.GN].

[57] C. Villani. *Optimal Transport. Old and New*. Vol. 338. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. The cited numbering and pagination refer to the author's manuscript dated 13 June 2008. Berlin: Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-3-540-71050-9.

[58] K. R. Wicks. *Fractals and Hyperspaces*. Vol. 1492. Lecture Notes in Mathematics. Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. DOI: 10.1007/BFb0089156.

[59] T. Yuji. *The Moduli Stack of Compact Metric Spaces*. Version 2. 2026. DOI: 10.48550/arXiv.2512.22847. arXiv: 2512.22847v2 [math.MG].

[60] N. Zava. *Coarse and bi-Lipschitz embeddability of subspaces of the Gromov–Hausdorff space into Hilbert spaces*. *Algebraic & Geometric Topology* 25.8 (2025), pp. 5153–5174. DOI: 10.2140/agt.2025.25.5153. arXiv: 2303.04730v3 [math.MG].

東京都立大学理学研究科数理科学専攻,〒 192-0397 東京都八王子市南大沢
電子メール: ishiki-yoshito@tmu.ac.jp